UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

**CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS**

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

# SUR LE CALCUL D'UN POINT D'EQUILIBRE DANS LE CAS DES COUTS NON-SYMETRIQUES: REVUE ET NOUVEAUX DEVELOPPEMENTS

Clermont Dupuis

et

Sang Nguyen

Cette étude a été effectuée grâce à une subvention du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie, Canada.

Ce rapport a été publié grâce à une subvention du fonds F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #271

Novembre 1982

Dépôt légal - 3e trimestre 1984

## RÉSUMÉ

Nous considérons le modèle d'équilibre de trafic général lorsque les fonctions de coût sur chaque arc du réseau dépendent du flot sur tous les arcs du réseau. De plus, ces fonctions de coût sont supposées non-symétriques.

Le modèle d'équilibre tient compte de plusieurs catégories d'usagers et de plusieurs modes de transport.

A partir de l'inégalité variationnelle de Smith:

$$(Cx^*, x-x^*) \geq 0 \qquad \forall\, x$$

la recherche d'un flot d'équilibre se ramène soit à la résolution d'un problème MIN-MAX, soit à la résolution d'un problème MAX-MIN complémentaire, ou encore, au calcul d'un point de selle d'une fonction de la forme $(Cx, x-y)$.

En considérant ces trois formulations d'un problème d'équilibre, plusieurs classes de méthodes dites de projection ou de points fixes sont discutées. L'exemple de Dafermos (1980) y est étudié dans ce cadre général.

Dans des travaux ultérieurs, nous verrons d'autres approches reliées à ces formulations du problème d'équilibre. Par exemple, nous examinerons le comportement de différentes méthodes de directions réalisables en liaison avec ces nouvelles formulations.

## TABLE DES MATIÈRES


Introduction . . . . . 1

1. Notation et description du problème. . . . . 3

2. Formulation MIN-MAX, MAX-MIN et point de selle . . . . . 4

3. Survol des algorithmes du type des méthodes de projection pour résoudre un problème d'équilibre général . . . . . 8

4. Méthode du sous-gradient . . . . . 13

5. Généralisation des méthodes de projection pour résoudre un problème d'équilibre général: cas du flot sur les arcs. . . . . 29

6. Exemple de Dafermos. . . . . 39

7. Généralisation des méthodes de projection pour résoudre un problème d'équilibre général: cas du flot sur les chemins. . . . . 49

Conclusion . . . . . 56

Références . . . . . 57


## LISTE DES TABLEAUX ET FIGURES


Réseau de Dafermos (1980). . . . . 39

Tableau 1 - Algorithme de Dafermos . . . . . 43
- Algorithme général (section 5) . . . . . 43

Tableau 2 - Variante 1 de l'algorithme général . . . . . 44
- Variante 2 de l'algorithme général . . . . . 45

Tableau 3 - Absence de la constante de Lipschitz et du paramètre de forte momotonie dans le calcul du pas . . . . . 46

Tableau 4 - Méthode du sous-gradient de Polyak . . . . . 47

## INTRODUCTION

Nous considérons ici le problème de la recherche d'un flot d'équilibre sur un réseau. Pour simplifier l'exposé, nous allons nous restreindre au cas simple d'un seul mode de transport, d'une seule catégorie de flot et de la demande de flot constante. Le coût de transport de chaque arc est une fonction des flots des arcs du réseau, aucune symétrie n'est imposée.

On appelle flot d'équilibre un flot réalisable (vérifiant les équations de conservation de flot) possédant la propriété que pour toute paire origine-destination, il ne doit exister aucun chemin de coût de transport inférieur à celui d'un chemin de flot positif (équilibre de Wardrop, 1952).

Mathématiquement, la propriété ci-dessus possède un large éventail de formulations équivalentes. Le modèle le plus simple dit "modèle standard" possède une fonction de coûts sur chaque arc qui dépend uniquement du flot sur cet arc. Le modèle standard a été examiné par plusieurs auteurs et différents algorithmes ont été développés (par exemple, LeBlanc *et al.*, 1975; Nguyen, 1974, 1976). Les conditions d'équilibre correspondent alors aux conditions de Kuhn-Tucker d'un problème de programmation convexe non-linéaire (Wardrop, 1952; Beckmann *et al.*, 1956). Même si ce modèle simple est adéquat dans bien des applications, il ne tient pas compte des situations où le coût sur chaque arc dépend du flot des autres arcs du réseau.

Dans ce papier, nous considérons cette généralisation du modèle d'équilibre. Malheureusement, lorsque le Jacobien du vecteur de coût n'est

pas symétrique, les conditions d'équilibre ne peuvent plus être exprimées à partir d'un problème de programmation mathématique (Dafermos, 1972). Toutefois, Smith (1979) a formulé le problème d'équilibre dans ce cadre général sous la forme d'une inégalité variationnelle comme suit:

"trouver un flot réalisable $x^*$ tel que $(Cx^*, x-x^*) \geq 0$
$\forall$ trafic x."

A partir de cette inégalité de Smith, nous allons énoncer d'autres formulations du problème de la recherche d'un flot d'équilibre: soit, un problème de programmation convexe non nécessairement différentiable, un problème MAX-MIN et un problème de point de selle (section 2).

A la section 3, nous donnons un survol des méthodes dites de projection appliquées au problème d'équilibre. Les résultats proviennent des articles de Dafermos (1980), Bertsekas et Gafni (1980), Shu-Cherng Fang (19 ) et Sibony (1970).

Dans la section 4, nous adoptons l'approche générale de projection dans le cadre des trois formulations de la section 2. Nous verrons comment les propriétés inhérentes à ces formulations jouent un rôle dans l'implantation et la convergence des algorithmes de projection.

Puis, on retrouve à la section 5, une généralisation primale-duale de l'algorithme de Dafermos (1980). Contrairement à Dafermos (1980) qui calcule un point fixe solution de l'inégalité variationnelle de Smith (1979), nous cherchons un point de selle de la fonction $(Cx, x-y)$.

Pour examiner très brièvement le comportement de ces algorithmes, nous avons repris l'exemple de Dafermos (1980). Cet exemple est nettement

irréaliste à cause de la taille du réseau, mais, par contre, la solution de chaque sous-problème de projection est obtenue explicitement, facilitant ainsi l'implantation de ces algorithmes.

Enfin, la généralisation obtenue à la section 5 est examinée lorsqu'on considère les flots sur les chemins plutôt que le flot sur les arcs (Bertsekas et Gafni, 1980).

## 1. Notation et description du problème

On se donne un réseau de transport G formé de N sommets et M arcs. On distingue P paires origine-destinations (O/D) et l'on dénote par $d_p$ la demande de flot entre la $p^{ième}$ paire O/D. Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_M)$ le vecteur de flot où $x_i$ est le flot sur l'arc i. $x \geq 0$ est un flot réalisable s'il satisfait les équations de conservation de flots habituelles. On dénotera $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ l'ensemble des flots réalisables, on suppose $\Omega$ borné et non vide ($d_p$ fini, $p = 1,2,\ldots$ et il existe au moins un chemin reliant la $p^{ième}$ paire O/D). A chaque arc i du réseau est associé un coût de transport $c_i(x)$ fonction continue à valeurs réelles définie sur $\Omega$. On désigne par Cx la fonctionnelle $(c_1(x),\ldots,c_M(x))$; $C : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$.

Un flot $x^* \in \Omega$ est un flot d'équilibre si et seulement si, pour toute paire O/D, aucun chemin ne peut avoir un coût de transport strictement inférieur à celui d'un chemin portant un flot positif.

D'après Smith (1979), $x^*$ est un flot d'équilibre si et seulement si

$$x^* \in \Omega, \ (Cx^*, x - x^*) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \Omega$$

où (,) est le produit scalaire ordinaire dans $\mathbb{R}^M$.

$\Omega$ étant un convexe non vide, l'existence de $x^*$ est assurée par la continuité de Cx, alors que l'unicité de $x^*$ demande que l'on suppose en plus que Cx soit strictement monotone sur $\Omega$. Remarquons enfin que la forte monotonie implique la stricte monotonie.

Dans la prochaine section, nous obtenons de nouvelles formulations pour le problème de la recherche d'un flot d'équilibre général.

## 2. Formulation MIN-MAX, MAX-MIN et point de selle

Nous supposerons dans ce qui suit que Cx est continu, monotone sur $\Omega$ convexe, compact non vide. Ceci nous assure l'existence d'un flot d'équilibre $x^* \in \Omega$ et nous donne les équivalences suivantes (Glowinski *et al.*, 1976; Auslender, 1976; Nguyen et Dupuis, 1981):

a) $x^* \in \Omega$, $(Cx^*, x - x^*) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \Omega$

b) $x^* \in \Omega$, $(Cx, x - x^*) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \Omega$

Remarquons que l'équilibre $x^* \in \Omega$ n'est pas nécessairement unique.

L'inégalité a) peut aussi s'écrire:

$$\text{"Trouver } x^* \in \Omega, \text{ solution optimale du problème } \operatorname*{Max}_{x \in \Omega} f(x) \qquad (2.1)$$

$$\text{où } f(x) = \operatorname*{Min}_{y \in \Omega} (Cx, y - x)."$$

Malheureusement, ce problème de programmation mathématique n'est, en général, ni convexe, ni différentiable. Toutefois, l'évaluation de la fonction f au point $x \in \Omega$ est relativement facile; en effet, cela nous ramène à la résolution d'un problème de plus courts chemins.

De même, l'inégalité b) s'écrit encore:

"Trouver $x^* \in \Omega$, solution optimale du problème $\underset{x \in \Omega}{\text{Min}}\ g(x)$

où $g(x) = \underset{y \in \Omega}{\text{Max}}\ (Cy, x-y)$." (2.2)

Cette fois, la fonction g(x) est convexe sur $\Omega$, mais non nécessairement différentiable partout (Hearn et Nguyen, 1982). Par contre, l'évaluation de g(x) s'avère difficile; cela consiste à résoudre un problème d'optimum collectif ("system optimum") auquel on a ajouté un terme de pénalité. Des recherches ultérieures verront à profiter au maximum de cette propriété de convexité de g(x).

La paire de problèmes (2.1) et (2.2) nous amène à penser que le calcul d'un point d'équilibre peut consister dans la recherche d'un point de selle d'une fonction du type $h(x,y) = (Cx, x-y)$ définie sur $\Omega \times \Omega$.

Considérons la proposition suivante:

Proposition 2.1: $(x^*, y^*) \in \Omega \times \Omega$ est un point de selle de $(Cx, x-y)$ sur $\Omega \times \Omega$ si et seulement si

$x^*$ et $y^*$ sont des flots d'équilibre.

Preuve:

1) Supposons d'abord que $x^*$ et $y^*$ sont des flots d'équilibre.

D'après les inégalités variationnelles a) et b), nous avons

$$(Cx^*, x^*-y) \leq 0 \leq (Cx, x-y^*) \qquad \forall\ x, y \in \Omega,$$

de sorte que

$0 \geq (Cx^*, x^*-y^*)$

et $(Cx^*, x^*-y^*) \geq (Cy^*, x^*-y^*) \geq 0$ car Cx est monotone sur $\Omega$,

cela suit alors que $(Cx^*, x^*-y^*) = 0$.

$\therefore$ $(x^*, y^*)$ est un point de selle de $(Cx, x-y)$ sur $\Omega \times \Omega$.

2) Supposons maintenant que $(x^*, y^*)$ est un point de selle de $h(x,y)$ sur $\Omega \times \Omega$. Par conséquent,

$$\max_{y \in \Omega} (Cx^*, x^*-y) \leq 0 \leq \min_{x \in \Omega} (Cx, x-y^*)$$

ce qui s'écrit:

$$(Cx^*, x^*-y) \leq 0 \qquad \forall\, y \in \Omega$$

et $$(Cx, x-y^*) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \Omega\ .$$

Donc, $x^*$ et $y^*$ sont des flots d'équilibre. □

En examinant la preuve précédente, on voit facilement que la valeur du point de selle de h sur $\Omega \times \Omega$ est nulle.

Le corollaire suivant a déjà été mentionné par Fisk et Boyce (1981).

Corollaire 2.1. Supposons que les fonctions de coût sont strictement monotones, alors

$x^*$ est l'unique flot d'équilibre si et seulement si

$(x^*, x^*)$ est l'unique point de selle de $(Cx, x-y)$ sur $\Omega \times \Omega$.

Examinons maintenant certaines propriétés de la fonction h qui nous seront utiles dans les prochaines sections.

**Proposition 2.2:**

Supposons que Cx est un opérateur affine, alors $h(x,\bar{y})$ est convexe, strictement convexe ou fortement convexe de rayon $\alpha > 0$, sur $\Omega$ si et seulement si

Cx est respectivement monotone, strictement monotone ou fortement monotone de rayon $\alpha > 0$, sur $\Omega$

où $\bar{y}$ est un élément fixé.

**Preuve:**

Nous allons considérer le cas convexe (respectivement monotone) dans notre démonstration, le reste de la preuve étant similaire.

Posons $Cx = Ax + b$, on obtient:

$$h(x,\bar{y}) = (Cx, x-\bar{y})$$
$$= (x^t Ax - \bar{y}^t Ax + b^t(x-\bar{y})$$

et $$\nabla_x h(x,\bar{y}) = (A+A^t)x - A^t\bar{y} + b$$

ce qui entraîne que

$$h(z,\bar{y}) + \nabla_z h(z,\bar{y})(x-z) = h(x,\bar{y}) - (x-z)^t A(x-z)$$
$$\leq h(x,\bar{y})$$

d'après Auslender (1976). □

Soit $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et l'opérateur unique B(z).

**Proposition 2.3**

(Cx,x-y) est convexe-concave sur $\Omega \times \Omega$ si et seulement si

$$B(z) = \begin{pmatrix} Cx + J_C(x)^t(x-y) \\ Cx \end{pmatrix} \quad \text{est monotone sur } \Omega \times \Omega .$$

**Preuve**: voir Auslender (1976).

A la section suivante, nous effectuons un survol des méthodes de projection appliquées au problème (2.1).

## 3. Survol des algorithmes du type des méthodes de projection pour résoudre un problème d'équilibre général

Dans cette section, nous considérons différents algorithmes de points fixes nous permettant de calculer des solutions d'équilibre. Sans hypothèse de symétrie du Jacobien de Cx, Dafermos (1980) propose le schéma itératif suivant:

$$x^{k+1} = P_{\Omega}^{G}(x^k - \rho G^{-1} cx^k), \qquad k=0,1,2,... \tag{3.1}$$

où la fonction de coût est supposée continuement différentiable et fortement monotone sur $\Omega$, G est une matrice symétrique définie-positive et $\rho > 0$ est choisie à l'avance. $P_{\Omega}^{G}$ est l'opérateur de projection sur $\Omega$ au sens du produit scalaire $\langle x,y\rangle = (x,Gy)$.

Considérons la propriété suivante des opérateurs de projection (Kinderlehrer et Stampacchia, 1980):

**Proposition 3.1**

Soit K un ensemble fermé et convexe sur un espace de Hilbert, alors $y = P_K(x)$, la projection de x sur K, si et seulement si

$$y \in K, \ (y, \eta - y) \geq (x, \eta - y) \qquad \forall \ \eta \in K.$$

Le résultat suivant est alors obtenu.

**Proposition 3.2**

Chaque point fixe du processus itératif (3.1) est un flot d'équilibre.

**Preuve:** $\bar{x} = P_{\Omega}^{G}(\bar{x}-\rho G^{-1}c\bar{x})$

$\Longleftrightarrow$

$(\bar{x},G(y-\bar{x})) \geq (\bar{x}-\rho G^{-1}c\bar{x},G(y-\bar{x}))$ $\quad \forall\, y\in\Omega$ (prop. 3.1)

$\Longleftrightarrow$

$(c\bar{x},y-\bar{x}) \geq 0$ $\quad \forall\, y\in\Omega$ .

Ce résultat est démontré dans Dafermos (1980) et Shu-Cherng Fang (19 )

□

Dafermos (1980) démontre les deux résultats suivants:

**Proposition 3.3**

Soit $\nu$ le maximum sur $\Omega$ de la valeur propre maximale de la matrice symétrique définie positive

$$[J_c(x)]^t G^{-1} J_c(x) .$$

Alors, en prenant $0 < \rho < 2\alpha/\nu$ où $\alpha$ est le paramètre de forte monotonie, (3.1) possède un point fixe et $\|P_{\Omega}^{G}(x-\rho G^{-1}cx)-P_{\Omega}^{G}(y-\rho G^{-1}cy)\|_G \leq \lambda\|x-y\|_G$ $\forall\, x,y\in\Omega$, où $\lambda=[1-(1/\mu)\,\rho\,(2\alpha-\nu\rho)]^{\frac{1}{2}}$, $\mu$ étant la valeur propre maximale de G, par rapport à la norme $\|x\|_G = (x\cdot Gx)^{\frac{1}{2}}$.

**Théorème 3.1**

Soit $x^*$ l'unique flot d'équilibre, et $0<\rho<2\alpha/\nu$, $x^0\in\Omega$ quelconque, alors $x^k \to x^*$ lorsque $k \to \infty$ ,

et $\|x^k-x^*\|_G \leq \lambda^k/(1-\lambda) \cdot \|x^1-x^0\|_G$ où $\lambda$ est définie à la proposition 3.3.

De plus, Dafermos (1980) nous fait remarquer que le processus itératif décrit en (3.1) nous amène à résoudre à l'itération $k(k\geq 0)$ un problème d'équilibre où les fonctions de coût sont affines, symétriques et définies positives de la forme $Gx+(\rho cx^k-Gx^k)$.

Ultérieurement, Shu Cherng Fang (19 ) considère le schéma itératif (3.1) où il impose aux fonctions de coût la condition de Lipschitz et celle de forte monotonie. Il démontre la convergence lorsque G égale l'identité et $\rho$ est un scalaire entre 0 et $2\alpha/L^2$, où $\alpha>0$ est le paramètre de forte monotonie et $L>0$ est la constante de Lipschitz. Dans le cas précédent où G est une matrice symétrique définie positive, $\rho$ doit être compris entre 0 et $\frac{2\alpha\bar{u}^2}{uL^2}$, où u et $\bar{u}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de G. Schu Cherng Fang (19 ) nous réfère aussi à plusieurs méthodes de calcul de points fixes: Merrill (1971), Eaves et Saigal (1972) et Todd (1976).

Notons toutefois qu'en (3.1), la projection est faite sur l'ensemble des flots d'arcs réalisables ce qui peut causer des difficultés au niveau des calculs. Bertsekas et Gafni (1980) ont résolu ce problème en effectuant une transformation de variables de sorte que la projection est maintenant accomplie sur l'ensemble réalisable des flots sur les chemins. Ils proposent l'algorithme suivant:

$$y^{k+1} = P^G_{\Omega}(y^k - \rho G^{-1} A^t C(Ay^k)) \qquad k=0,1,2,... \qquad (3.2)$$

où y représente ici un vecteur de flots de chemin et A la matrice d'incidence arc-chemin du réseau G. La convergence de l'algorithme est démontrée lorsque $\rho$ est choisie suffisamment petit et que C est fortement monotone, continu et satisfaisant la condition de Lipschitz:

$$(Cx^1-Cx^2, Cx^1-Cx^2) \leq L(x_1-x_2, x_1-x_2) \quad \forall \text{ tout flot d'arc réalisable } x^1 \text{ et } x^2 \qquad (3.2)'$$

Puisque $A^tCA$ n'est pas fortement monotone en général, la convergence n'est pas garantie par la théorie déjà existante (Sibony, 1970).

Remarquons que $y^{k+1}$ est solution unique du problème multi-flot quadratique:

$$\underset{y\in\Omega}{\text{Min}} \frac{1}{2\rho}(y-y^k)^t G(y-y^k) + (y-y_k)^t A^t C(Ay^k) \qquad (3.3)$$

où $\Omega$ représente l'ensemble des flots de chemin réalisable.

La structure particulière des équations de conservation de flot de chemin permet de décomposer (3.3) en autant de sous-problèmes indépendants que de paires O/D, chacun ne comporte qu'une seule contrainte linéaire. Cette approche facilite considérablement le calcul numérique de la projection, mais elle est très alourdie par le grand nombre de variables de flot de chemin, ce qui nécessite l'application d'une stratégie de restriction des variables.

Le taux de convergence est au moins linéaire. En effet, il existe un $\bar{\rho}>0$ tel que $\forall\ \rho\in(0,\bar{\rho}]$ la suite $\{y^k\}$ générée par (3.3) converge à une solution $y^*\in\Omega^*$ telle que

$$\|y^k-y^*\|_G \leq qB^k, \qquad k=0,1,2...$$

où $q>0$ et $B\in(0,1)$ dépendent de $\rho$ et de $y^0$, $\Omega^*=\{y^*\in\Omega \mid x^*=Ay^*\}$, $x^*$ est l'unique flot d'arc à l'équilibre.

Jusqu'à maintenant, l'algorithme de Dafermos (1980) et celui de Bertsekas et Gafni (1980) ont été restreints à utiliser la même matrice G à chaque itération. Bertsekas et Gafni (1980) ont considéré une version généralisée de (3.2),

$$y^{k+1} = P_{\Omega}^{G_k}(y^k-\rho G_k^{-1}A^tC(Ay^k)), \qquad k=0,1,2... \qquad (3.4)$$

où $\{G_k\}$ est une suite de matrices symétriques et définies positives où

toutes les valeurs propres de chacune d'elles appartiennent à un intervalle compact des réels positifs. Les mêmes résultats de convergence sont obtenus lorsque la condition suivante est satisfaite:

$$G_{k+1} = G_k \quad \text{si l'algorithme n'a pas progressé suffisamment,}$$

c'est-à-dire en posant $w_k = (y^{k+1}-y^k)^t G_k (y^{k+1}-y^k)$ ,

$$\bar{w}_{k+1} = \begin{cases} \bar{B}w_k & \text{si } w_k \leq \bar{w}_k \\ \bar{w}_k & \text{si } w_k > \bar{w}_k \end{cases} \qquad \text{où } \bar{B} \in (0,1),\ \bar{w}_0 = \infty ,$$

$$G_{k+1} = G_k \quad \text{si} \quad \bar{w}_{k+1} = \bar{w}_k .$$

Remarquons enfin que les conditions de convergence et les aspects numériques des méthodes de projection (3.1) et (3.2) ont été étudiés dans le cas général par Sibony (1970). Par exemple, il démontre la forte convergence de (3.1) lorsque $\rho$ est choisi suffisamment petit dans le cas de fonctions de coûts fortement monotones satisfaisant une condition de Lipschitz. Il suggère aussi les itérations (3.1) où $\rho$ est variable: on peut poser $\rho = \rho_k = (Cx^k - Cx^{k-1}, x^k - x^{k-1})/\|G^{-1}(Cx^k - Cx^{k-1})\|_G^2$ dans le calcul de $x^{k+1}$. On voit facilement que $\rho_k \geq \alpha/\gamma$.

Différentes procédures mixtes sont aussi soulignées.

Malheureusement, cette approche de projection possède des inconvénients notables, à savoir le choix judicieux de la constante $\rho$ et la résolution de chaque sous-problème de projection.

Dans la prochaine section, nous allons examiner une approche de sous-gradient pour résoudre soit (2.1), soit (2.2) ou soit un problème de point de selle.

## 4. Méthode du sous-gradient

### a) Résolution du problème (2.1)

Considérons en premier lieu la résolution du problème (2.1).

Soit le problème

$$\text{Min } f(x) \quad \text{où} \quad f(x) = \max_{y \in \Omega} (Cx, x-y) \qquad (4.1)$$
$$\text{sujet à } x \in \Omega$$

Nous avons vu à la section 2 que certaines sous-classes de fonctions de coût sont telles que f(x) est convexe (strictement ou fortement convexe) sur $\Omega$. Examinons en détail cette situation.

Proposition 4.1

Si f(x) est convexe, $x^{k+1} = P_{\Omega}(x^k - \alpha_k(Cx^k + J_C(x^k)^t(x^k - u^k)))$

où $\alpha_k = \lambda_k / \|Cx^k + J_C(x^k)^t(x^k - u^k)\|$, $\lambda_k \to 0$ $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$,

$u_k$ est le plus court chemin associé à $Cx^k, J_C(x^k)$ indique le Jacobien de C au point $x^k$, alors il existe une sous-suite de $\{x^k\}$ qui converge vers l'optimum.

Preuve :

Polyak (1969) indique que la preuve de cette proposition est retrouvée dans Pokyak (1967). Ce dernier papier est disponible en russe seulement. Une preuve détaillée est donnée par Auslender (1976).

Toutefois, cet algorithme possède une convergence très lente. Pour accélérer cette convergence, nous choisissons $\alpha_k = \lambda_k \cdot \dfrac{f(x^k)}{\|z^k\|^2}$

$0 < \varepsilon_1 \leq \lambda_k \leq 2 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > 0$, $z^k \in \partial f(x^k)$.

**Proposition 4.2**

Sachant que $\Omega$ est convexe et compact, qu'il existe au moins un optimum $x^* \in \Omega$, et que $f(x^*) = 0$, si $f(x)$ est convexe et $\|z\| \leq c \quad \forall z \in \partial f(x)$ où c est une constante donnée, alors $f(x^k) \to 0$ dans la méthode suivante:

$$x^{k+1} = P_\Omega(x^k - \alpha_k(Cx^k + J_C(x^k)^t(x^k - u^k)))$$

$$\text{avec} \quad \alpha_k = \lambda_k \times \frac{(Cx^k, x^k - u^k)}{\|Cx^k + J_C(x^k)^t(x^k - u^k)\|^2}, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \lambda_k \leq 2 - \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 > 0$$

tandis que $x^k$ converge vers un point d'équilibre.

**Preuve**

Cette preuve est basée essentiellement sur le résultat de Polyak (1969).

Sachant qu'une fonction continue et convexe possède une fonction de support à chaque point et que la projection sur un ensemble convexe compact existe, alors la méthode énoncée à la proposition 4.2 est bien définie.

En utilisant la propriété d'un opérateur de projection $\|P_\Omega(x) - P_\Omega(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega$, et sachant que $f(x^*) \geq f(x^k) + (z^k, x^* - x^k)$, $z^k \in \partial f(x^k)$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|P_\Omega(x^k - \alpha_k z^k) - x^*\|^2 \\
&\leq \|x^k - \alpha_k z^k - x^*\|^2 \\
&= \|x^k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|z^k\|^2 - 2\alpha_k(z^k, x^k - x^*) \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + \frac{\lambda_k^2 (f(x^k))^2}{\|z^k\|^2} - 2\lambda_k \frac{f(x^k)}{\|z^k\|^2} (f(x^k)) \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (f(x^k))^2}{\|z^k\|^2} . \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

D'où, $\|x^k-x^*\|$ est décroissant et $\|x^k-x^*\| \le \|x^0-x^*\|$. Puisque $\|z^k\|^2$ est bornée pour tout k, alors $f(x^k)\to 0$. Ainsi, il existe une sous-suite de $\{x^k\}$ convergeant vers un point d'équilibre $\bar{x}$.

Nous montrons ensuite que la suite entière $\{x^k\}$ converge vers $\bar{x}$. Supposons qu'il existe deux suites, $x^{k_i}\to\bar{x}$ et $x^{\ell_i}\to\bar{\bar{x}}$, $\bar{x}\neq\bar{\bar{x}}$ . Nous savons que $\|x^{k_i}-\bar{x}\|\to\rho_1$, $\|x^{\ell_i}-\bar{\bar{x}}\|\to\rho_2$. Sachant que $\bar{x}$ et $\bar{\bar{x}}$ sont des points d'équilibre et d'après l'inégalité (4.2) où x* est remplacé par $\bar{x}$ et $\bar{\bar{x}}$ respectivement, nous avons:

$\|x^k-\bar{x}\|\to\rho_1$, $\|x^k-\bar{\bar{x}}\|\to\rho_2$ et en particulier, $\|x^{\ell_i}-\bar{x}\|\to\rho_1$, $\|x^{k_i}-\bar{\bar{x}}\|\to\rho_2$ .

Supposons que $\rho_1\le\rho_2$. Alors, $\|x^{\ell_i}-\bar{x}\|^2=\|x^{\ell_i}-\bar{\bar{x}}+\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|^2=\|x^{\ell_i}-\bar{\bar{x}}\|^2+\|\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|^2 + 2(x^{\ell_i}-\bar{\bar{x}},\bar{\bar{x}}-\bar{x})$

$\to \rho_2^2+\|\bar{\bar{x}}-\bar{x}\|^2>\rho_1^2$ ce qui est impossible

puisque $\|x^{\ell_i}-\bar{x}\|\to\rho_1$ . □

Une preuve détaillée est aussi donnée par Auslender (1976).

Examinons maintenant le taux de convergence de cet algorithme.

Posons $\bar{\Omega}=\{x^*\in\Omega \mid x^* \text{ est un point d'équilibre}\}$ .

Considérons la condition (4.3) suivante:

$$f(x)\ge m \min_{y\in\bar{\Omega}}\|x-y\| \quad \forall\, x\in\Omega : \|x-P_{\bar{\Omega}}(x^0)\|\le \min_{y\in\bar{\Omega}}\|x^0-y\|$$

où $m>0$

Polyak (1969) démontre alors la convergence de la méthode précédente au taux d'une série géométrique.

**Proposition 4.3**

Si f(x) satisfait la condition (4.3) et que les conditions de la proposition 4.2 sont vérifiées, alors cette dernière méthode converge à un point d'équilibre x* au taux d'une série géométrique:

$$\|x^k - x^*\| \leq \left[ \left( \min_{y \in \Omega} \|x^0 - y\| \right) \cdot \left( 1 + \frac{2}{1-q} \right) \right] q^k$$

où $q = (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{m^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$ .

**Preuve:**

La démonstration de cette proposition est faite par Polyak (1969). Nous la reprenons ici afin d'être complets.

A partir de la démonstration de la proposition 4.2, on trouve que

$$\|x^k - P_{\overline{\Omega}}(x^0)\| \leq \min_{y \in \overline{\Omega}} \|x^0 - y\| \qquad \forall\, x^k.$$

d'où

$$\begin{aligned}
(\min_{y \in \overline{\Omega}} \|x^{k+1} - y\|)^2 &\leq \|x^{k+1} - P_{\overline{\Omega}}(x^k)\|^2 \\
&\leq \|x^k - P_{\overline{\Omega}}(x^k)\|^2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (f(x^k))^2}{\|z^k\|^2}, \quad z^k \in \partial f(x^k) \\
&\leq (\min_{y \in \overline{\Omega}} \|x^k - y\|)^2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 m^2}{c^2} (\min_{y \in \overline{\Omega}} \|x^k - y\|)^2 \\
&= q^2 \cdot (\min_{y \in \overline{\Omega}} \|x^k - y\|)^2 .
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\min_{y \in \overline{\Omega}} \|x^k - y\| \leq q^k \cdot \min_{y \in \overline{\Omega}} \|x^0 - y\|$ .

A partir des propriétés d'opérateurs de projections, nous avons:

$$\|P_{\bar{\Omega}}(x^{k+1})-P_{\bar{\Omega}}(x^k)\| \le \|x^{k+1}-x^k\|$$

$$\le \|x^{k+1}-P_{\bar{\Omega}}(x^k)\| + \|x^k-P_{\bar{\Omega}}(x^k)\|$$

$$\le 2\|x^k-P_{\bar{\Omega}}(x^k)\|$$

$$\le 2q^k \cdot \operatorname{Min}_{y\in\bar{\Omega}} \|x^0-y\| \quad .$$

D'où la suite $P_{\bar{\Omega}}(x^k)$ converge à un point d'équilibre $x^*$ avec

$$\|P_{\bar{\Omega}}(x^k)-x^*\| \le \frac{2q^k}{1-q} \cdot \operatorname{Min}_{y\in\bar{\Omega}} \|x^0-y\| \quad .$$

Enfin on a:

$$\|x^k-x^*\| \le \|x^k-P_{\bar{\Omega}}(x^k)\| + \|P_{\bar{\Omega}}(x^k)-x^*\| \le (q^k \cdot \operatorname{Min}_{y\in\bar{\Omega}}\|x^0-y\|) \cdot (1+\frac{2}{1-q}) = Kq^k \quad .$$

□

Nous allons maintenant considérer un cas où la condition (4.3) est satisfaite.

Proposition 4.4

Si $\phi(x)$ est fortement convexe sur un ensemble X convexe et fermé où $\rho$ est le paramètre de convexité forte, alors $\forall\, x \in X$, on a l'inégalité

$$\phi(x)-\phi(x^*) \ge \frac{\rho}{2} \|x-x^*\|^2 \qquad \text{où } x^* \text{ est le point minimum.}$$

**Preuve**: (Voir Karmanov (1977), p. 42-43).

En posant $\phi(x) = f^2(x)$ fortement convexe sur $\Omega$, on obtient alors $f^2(x) \geq \frac{\rho}{2} \|x-x^*\|^2$ ce qui implique $f(x) \geq \sqrt{\frac{\rho}{2}} \cdot \|x-x^*\|$. Dans ce cas, $m = \sqrt{\frac{\rho}{2}}$.

Certes, les hypothèses de convexité sur f(x) sont plutôt restrictives, mais la sous-classe des fonctions de coût affines satisfait ces hypothèses et elle est souvent rencontrée en pratique. L'amélioration de la convergence de la méthode élaborée à la proposition 4.2 est rendue possible grâce à la remarque suivante de Polyak (1969):

$$\text{en posant } Q_k = \{x \in \Omega \mid f(x^k) + (z^k, x-x^k) \leq 0,\ k \in I_k\},\ x^{k+1} = P_\Omega P_{Q_k}(x^k)$$
$$\lambda_k \equiv 1,\ I_k = \{k\},\ z^k \in \partial f(x^k), \tag{4.4}$$

on obtient la méthode précédente (proposition 4.2).

Maintenant, nous pouvons considérer $I_k$ comme un sous-ensemble d'indices de $\{0,1,\ldots,k\}$ contenant k.

Lorsque nous prenons $I_k = \{0,1,\ldots,k\}$, l'approche obtenue a plusieurs traits en commun avec la méthode de plan de coupe de Kelley (1960). Toutefois, celle-ci ne possède pas le taux de convergence d'une série géométrique.

Polyak (1969) nous donne de façon explicite le cas $I_k = \{k-1,k\}$ :

$$x^{k+1} = P_Q(x^k - \alpha_k z^k - \beta_k z^{k-1}),$$
$$z^k \in \partial f(x^k),\ z^{k-1} \in \partial f(x^{k-1}),$$

où $\alpha_k \quad \frac{f(x^k)}{\|z^k\|^2}$ et $\beta_k = 0$ si $f(x^{k-1}) + (z^{k-1}, x^k - \frac{f(x^k)z^k}{\|z^k\|^2} - x^{k-1}) \leq 0$

sinon

$$\alpha_k = \{f(x^k)\|z^{k-1}\|^2 - (z^k, z^{k-1})(f(x^{k-1}) + (z^{k-1}, x^k - x^{k-1}))\} \cdot$$

$$\{\|z^k\|^2 \cdot \|z^{k-1}\|^2 - (z^k, z^{k-1})^2\}^{-1}$$

$$\beta_k = \{\|z^k\|^2 (f(x^{k-1}) + (z^{k-1}, x^k - x^{k-1})) - f(x^k)(z^k, z^{k-1})\} \cdot$$

$$\{\|z^k\|^2 \|z^{k-1}\|^2 - (z^k, z^{k-1})^2\}^{-1} \quad .$$

Mentionnons maintenant que ces derniers schémas itératifs font intervenir le Jacobien de la fonction de coût ce qui peut devenir un inconvénient majeur.

Les deux approches précédentes (propositions 4.1 et 4.2) ont été abordées par plusieurs autres auteurs. Par exemple, Shepilov (1976) considère la première approche où le pas est fixé a priori à chaque itération; il définit explicitement l'ensemble des points réalisables à partir de contraintes d'inégalités et s'assure la convergence de la méthode sans imposer la condition de Slater et un ensemble réalisable borné.

Polyak (19 ) suggère un pas fixe $\alpha_k = \alpha > 0$ qui est réduit de moitié à chaque fois que $f(x^k)$ oscille autour d'une limite. De même, Shor (1968) examine le cas $\alpha_k = \alpha_0 q^k$, $0 < q < 1$. Mais ces deux méthodes sont difficilement implantables.

Shor (1968) tente d'accélérer la convergence de la méthode du sous-gradient en considérant un opérateur de projection qui est transformé

à chaque itération. Il examine deux versions qui nécessitent le stockage d'une matrice mise à jour au début de chaque itération. Malheureusement, l'espace-mémoire exigé est beaucoup trop exhorbitant dans le cas de problèmes de flots d'équilibre.

Dans le cas où le flot d'équilibre n'est pas unique, ces méthodes de projection ne sont pas stables; en effet, la convergence vers un flot d'équilibre $x^*$ dépend du flot initial de départ. Polyak (19 ) introduit alors une fonction de régularisation $f_1(x)$ strictement convexe sur $\Omega$ et considère la méthode $x_{k+1}=P_\Omega(x_k-\alpha_k(z^k+\varepsilon_k z_1^k))$ où $\varepsilon_k \to 0$, $z^k \in \partial f(x^k)$, $z_1^k \in \partial f_1(x^k)$. Ainsi, nous obtenons la stabilité, i.e. le flot d'équilibre $x^*$ minimise $f_1(x)$. La proposition suivante a été démontrée par Bakushinskii et Polyak (1974).

Proposition 4.5

Soit $f(x)$ et $f_1(x)$ continues et convexes, $f_1(x)$ fortement convexe,

$$\varepsilon_k \to 0,\ \alpha_k/\varepsilon_k \to 0,\ \sum_k \varepsilon_k\alpha_k = \infty,\ \varepsilon_k/\varepsilon_{k+1} = 1 + 0\ (\alpha_k\varepsilon_k)$$

(par exemple, $\alpha_k = k^{-\frac{1}{2}}$, $\varepsilon_k = k^{-\rho}$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$).

Alors, $x_k \to x^*$, un flot d'équilibre qui minimise $f_1(x)$.

Dans le cas de fonctions de coûts monotones et affines, cet algorithme nous permet de calculer un point d'équilibre bien spécifique.

Remarquons que le problème (4.1) peut s'écrire aussi:

$$\min_{x\in\Omega} \max_{1\le j\le J} (Cx, x-y^j) \quad \text{où} \quad y^j \text{ est un point extrémal de } \Omega,\ |J| < \infty .$$

D'où $$\partial f(x) = \{ \sum_{j \in I(x)} \lambda_j \nabla(Cx, x-y^j) \mid \lambda_j \geq 0,$$

$$\sum_{j \in I(x)} \lambda_j = 1, \quad I(x) = \{j : y^j \text{ est un plus court chemin associé aux coûts } Cx\}\}.$$

Dans les algorithmes précédents, un point quelconque de $\partial f(x)$ est choisi.

b) Résolution du problème de programmation convexe (2.2)

En deuxième lieu, le problème (2.2) est à son tour examiné.

Il s'agit de résoudre

$$\min_{x \in \Omega} g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \max_{y \in \Omega} (Cy, x-y) \quad \text{est une fonction convexe sur } \Omega .$$

Les méthodes de sous-gradient exactes (Auslender, 1976) ne sont pas applicables ici car le calcul de g à un point $x \in \Omega$ donné est impossible de façon exacte; par contre, Polyak (1971) suggère une méthode de projection en présence de perturbations comme suit:

$$x^{k+1} = P_{\Omega}(x^k - \alpha_k C\tilde{y}^k)$$

où $\tilde{y}^k$ est une approximation de $y^k$ solution optimale de $\max_{y \in \Omega} (Cy, x^k - y)$ satisfaisant le critère $\|C\tilde{y}^k - Cy^k\| \leq c\|x^{k+1} - x^k\|$ .

En supposant g(x) différentiable sur $\Omega$, g'(x) satisfaisant une condition de Lipschitz de constante M, et $0 < \varepsilon_1 \leq \alpha_k \leq 2/(M+2c) - \varepsilon_2, \varepsilon_2 > 0$, il montre que $\{g(x_k)\}$ est monotone décroissant et $\lim g(x^k) = 0$, $g(x^k) = 0(1/k)$. Les conditions sur g(x) sont difficilement vérifiables; toutefois, on sait que g(x) est différentiable sur $\Omega$ lorsque Cx est affine. D'autres critères d'approximation peuvent être utilisés et d'autres façons de choisir le pas

ne faisant pas intervenir la constante M ont été étudiées. Toutefois, le calcul de $\tilde{y}^k$ est très exigeant.

Szymanowski et Ruszczynski(19 ) considèrent l'approche de Polyak (1971) et tentent d'établir à chaque itération de l'algorithme des tests de précision afin de déterminer si une augmentation de précision est nécessaire ou non. Puisque ces tests exigent possiblement la résolution de plusieurs problèmes de programmation quadratique et que la valeur optimale de $\max_{y\in\Omega} (Cy, x^k - y)$ n'est pas connue, c'est impensable.

Une approche plus simple est donnée par Polyak (1967). Lorsque la fonction de coût Cx est fortement monotone de paramètre $m > 0$, et $\|Cx - Cy\| \le L\|x-y\| \quad \forall\, x,y\in\Omega$ par exemple, la méthode suivante est prouvée convergente au taux d'une série géométrique:

$$x^{k+1} = P_\Omega(x^k - \alpha_k Cx^k); \quad \alpha_k \text{ est tel que } 0 < \lim_k \alpha_k < \frac{2m}{L^2},\ \alpha_k \ge 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty.$$

Par contre, lorsque la condition de forte monotonie n'est pas satisfaite, une méthode de régularisation est utilisée:

$$x^{k+1} = P_\Omega(x^k - \alpha_k(Cx^k + \varepsilon_k B(x^k)))$$

où Cx est monotone, Bx est uniformément monotone de paramètre $n > 0$, Cx et Bx sont continus,

$$\|Cx - Cy\| \le L\|x-y\|,\ \|Bx - By\| \le L\|x-y\| \ , \quad \forall\, x,y\in\Omega \ ,$$

$\lim_{k\to\infty} [\alpha_k(1+\varepsilon_k)^2/\varepsilon_k] < 2n/L^2$ et $\{\alpha_k\},\{\varepsilon_k\}$ doivent satisfaire les conditions de la proposition 4.5

Un choix possible de $\alpha_k$, $\varepsilon_k$ est: $\alpha_k = \theta\varepsilon_k$, $\varepsilon_k = k^{-p}$, $0 < p < \frac{1}{2}$, $\theta < 2n/L^2$. On peut poser aussi $Bx = x-a$, (où a est un vecteur constant) par exemple et considérer $L \leq 1$.

Des conditions autres que celles de Lipschitz sur C et B sont données par Bakushinskii et Polyak (1974), nous permettant des choix alternatifs au précédent.

De façon similaire à Bakushinskii et Polyak (1974), Auslender (1976) démontre la convergence de l'algorithme suivant vers un flot d'équilibre:

$$x^{k+1} = P_{\Omega}(x^k - \alpha_k Cx^k), \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

où $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^2 < \infty$, Cx est bornée et fortement monotone.

Il fait remarquer de plus que l'hypothèse de forte monotonie n'est pas nécessaire lorsque la condition suivante est satisfaite: pour tout flot d'équilibre $x^* \in \Omega$, $g(x^*) = 0$ et $\arg \underset{y\in\Omega}{\text{Max}}\ (Cy, x^*-y)$ est aussi un flot d'équilibre.

Deux cas:

a) La fonction de coût est strictement monotone

soit $x^* \in \Omega$, l'unique flot d'équilibre,

$$0 = \underset{y\in\Omega}{\text{Max}}\ (Cy, x^*-y) = (C\bar{x}, x^*-\bar{x}) < (Cx^*, x^*-\bar{x}) \leq 0$$

$$\text{si } \bar{x} \neq x^*$$

$$\Rightarrow \bar{x} = x^*.$$

Par conséquent, la condition de forte monotonie peut être ramenée à celle de stricte monotonie.

b) La fonction de coût est monotone

soit $x^*$ un flot d'équilibre

si la condition "arg $\underset{y\in\Omega}{\text{Max}}$ $(Cy, x^*-y)$ est un flot d'équilibre" est satisfaite,

alors la convergence est aussi assurée.

Remarquons qu'il est facile de montrer les résultats de Auslender (1976) lorsqu'on considère plutôt le processus itératif

$$x^{k+1} = P_{\Omega}(x^k - \alpha_k F^{-1} Cx^k), \qquad k=0,1,2,\ldots$$

où F est une matrice symétrique, définie positive.

c) <u>Calcul d'un point de selle de $(Cx, x-y)$ sur $\Omega \times \Omega$</u>

Nous allons maintenant considérer une approche de projection pour calculer un point de selle de la fonction $\phi(x,y)$ $(Cx, x-y)$ sur $\Omega \times \Omega$ (voir la proposition 2.1). Observons le schéma itératif suivant:

$$x^{k+1} = P_{\Omega}(x_k - \alpha_k (Cx^k + J_C(x^k)^t (x^k - y^k))$$

$$y^{k+1} = P_{\Omega}(y_k - \alpha_k Cx^k).$$

Selon Polyak (19 ), dans le cas où $(Cx, x-y)$ est convexe par rapport à x pour un y donné, et $\{x^* \in \Omega \mid \arg \underset{x\in\Omega}{\text{Min}} (Cx, x-y^*) = x^*, y^* \in \overline{\Omega}\} = \overline{\Omega}$ , c'est-à-dire $\phi(x,y)$ est stable par rapport à x, la méthode a été examinée par Majstrovsky (1976). Ce papier est disponible en russe seulement.

L'hypothèse de stabilité de $\phi(x,y)$ par rapport à x est satisfaite lorsque $\phi(x,y)$ est strictement convexe par rapport à x pour un y donné.

Dem'yanov et Pevnyi (1972) ont montré la convergence de cette méthode

lorsque $\alpha_k = \alpha$ est choisi suffisamment petit, sous des conditions peu réalistes. Bakushinskii et Polyak (1974) modifient l'approche précédente par régularisation:

$$x^{k+1} = P_\Omega(x_k - \alpha_k(Cx^k + J_C(x^k)^t(x^k - y^k) + \varepsilon_k \nabla f_1(x_k)))$$

$$y^{k+1} = P_\Omega(y_k - \alpha_k(Cx^k + \varepsilon_k \nabla f_2(y_k)))$$

où $f_1(x)$, $f_2(y)$ sont fortement convexes,

$\alpha_k$ et $\varepsilon_k$ satisfont les hypothèses de la proposition 4.5

$(Cx, x-y)$ est convexe par rapport à x.

Aucune hypothèse de stricte convexité-stricte concavité ou de stabilité de $\phi(x,y)$ est nécessaire.

De façon plus explicite, Auslender (19 ) débute en donnant une condition nécessaire et suffisante d'optimalité c'est-à-dire $(x^*,y^*)$ est un point de selle de $\phi$ sur $\Omega \times \Omega$. Il suppose que $(Cx, x-y)$ est convexe par rapport à $x \in \Omega$.

Proposition 4.6

Puisque $\phi(x,y^*)$ et $\phi(x^*,y)$ sont continues $\forall\ (x^*,y^*) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$,

$\bar{\Omega} \neq \phi$, $\phi(x^*,y^*)=0 \quad \forall\ (x^*,y^*) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$

alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(x^*,y^*)$ soit un point de selle est qu'il existe un $c^* \in \partial_x \phi(x^*,y^*)$ et un $d^* \in \partial_y \phi(x^*,y^*)$ tels que:

$$P_\Omega(x^* - \rho c^*) = x^*$$

$$P_\Omega(x^* + \rho d^*) = y^*.$$

Puisque $\phi(x,y)$ est différentiable par rapport à x et à y, cette condition d'optimalité peut s'écrire:

$$P_{\Omega}(x^*-\rho(Cx^*+J_C(x^*)^t(x^*-y^*))) = x^* \qquad (4.4.1)$$

$$P_{\Omega}(y^*-\rho Cx^*) = y^* \quad . \qquad (4.4.2)$$

Or, dans le cas où les fonctions de coûts sont strictement monotones, $\overline{\Omega}$ est un singleton et la condition précédente s'écrit encore: $P_{\Omega}(x^*-\rho Cx^*) = x^*$. Enfin, lorsque les fonctions de coût sont monotones, mais la fonction $(Cx,x-y)$ n'est pas nécessairement convexe en x pour un y donné, alors les conditions d'optimalité (4.4.1) et (4.4.2) sont suffisantes et (4.4.2) est nécessaire. (Soit $(x^*,y^*) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, Cx est monotone $\Rightarrow (Cx^*,y-y^*) = (Cx^*,y-x^*) + (Cx^*,x^*-y^*) \geq 0 \quad \forall\, y \in \Omega \Rightarrow$ (4.4.2) est satisfaite. (4.4.1) est aussi nécessaire lorsque Cx est affine). A partir de la proposition 4.6, Auslender propose l'algorithme suivant:

"Soit $a > 0, \{\rho_{1,k}\}, \{\rho_{2,k}\}, \{\lambda_k\}$ des suites de nombres positifs tels que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$,

$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = +\infty$, $(x_0,y_0) \in \Omega \times \Omega$, on construit une suite de points $\{(x_k,y_k)\}$ vérifiant les relations:

$$x_{k+1} = P_{\Omega}(a \cdot x_k - \rho_{1,k}(Cx^k + J_C(x^k)^t(x^k-y^k))) \qquad (4.5)$$

$$y_{k+1} = P_{\Omega}(a \cdot y_k - \rho_{2,k} Cx^k). \qquad (4.6)$$

L'algorithme s'arrête si $x_{k+1} = x_k$ et $y_{k+1} = y_k$."

A partir de la proposition 4.6, si a=1 et $x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = y_k$ alors $(x_k,y_k)$ est un point de selle de $\phi$ par rapport à $\Omega \times \Omega$. De même, Auslender nous fait remarquer que, si $a=1-2\alpha\rho$ $(\alpha > 0)$, si $\rho_{1,k} = \rho_{2,k} = \rho$ et si $x_{k+1} = x_k$ et $y_{k+1} = y_k$ alors $(x_k,y_k)$ est un point de selle relativement à $\Omega \times \Omega$ de la fonction $\phi_\alpha(x,y) = \phi(x,y)+\alpha(\|x\|^2-\|y\|^2)$. Ces deux approches sont montrées convergentes sous des conditions trop restrictives. Par exemple, dans le cas de fonctions de coûts affines, il considère le cas où le Jacobien est symétrique et défini-positif. Enfin, la proposition suivante est démontrée (voir Auslender, 19 ).

Proposition 4.7

Soit $\{(x_k,y_k)\}$ une suite vérifiant les relations (4.5) et (4.6) où on pose:

$$a=1, \rho_{1,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } \|Cx^k+J_c(x^k)^t(x^k-y^k)\| = 0 \\ \lambda_k/\|Cx^k+J_c(x^k)^t(x^k-y^k)\| \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\rho_{2,k} = \begin{cases} 0 \text{ si } \|Cx^k\| = 0 \\ \lambda_k/\|Cx^k\| \text{ sinon} \end{cases}$$

en supposant la continuité de f, g et $\phi$ (ce qui est le cas en pratique), alors il existe une sous-suite $\{x_{k_n},y_{k_n}\}$ telle que $\lim_{k\to\infty} \phi(x_{k_n},y_{k_n}) = 0$ .

Plusieurs autres méthodes ont été laissées de côté parce qu'elles exigeaient soit des hypothèses trop restrictives et/ou un procédé de calcul difficilement implantable.

Par exemple, McCormick et Tapia (1970,1972), Bertsekas (1974) et Dunn (1981) considèrent le problème général suivant:

$$\min_{x \in Q} F(x)$$

où F(x) est différentiable, Q est un ensemble convexe fermé; les deux méthodes suivantes y sont appliquées:

a) $x_{k+1} = P_Q(x_k - t_k \nabla f(x_k)), \quad k=0,1,2,\ldots$

où $t_k = \arg \min_{t \geq 0} F(P_Q(x_k - t\nabla F(x_k)))$

b) $x_{k+1} = x_k - t_k \tilde{\nabla} F(x_k), \quad k=0,1,2,\ldots$

où $t_k = \arg \min_{\substack{t \geq 0 \\ x_k - t\tilde{\nabla}F(x_k) \in Q}} F(x_k - t\tilde{\nabla}F(x_k))$

$\tilde{\nabla}F(x)$ dénote la projection de $\nabla F(x)$ sur la classe d'admissibilité de $x \in Q$.

Toutefois, une heuristique peut être décrite pour résoudre le problème (4.1) en se basant sur l'algorithme b) précédent:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k(y_k - x_k), \quad k=0,1,2,\ldots$$

où $y_k = P_\Omega(x^k - z^k)$, $z^k \in \partial f(x^k)$,

$\lambda_k = \arg \min_{\lambda \in [0,1]} f(x^k + \lambda(y^k - x^k))$.

Cette approche est une heuristique car f(x) n'est pas différentiable partout. Malheureusement, pour des problèmes de grande taille, cela devient impraticable puisque la minimisation en une dimension fait intervenir une fonction non-différentiable de $\lambda$ et pas nécessairement convexe, ni unimodal.

Remarquons en terminant le choix immense des méthodes de projection. Le but de la prochaine section est de généraliser cette approche.

## 5. Généralisation des méthodes de projections pour résoudre un problème d'équilibre général: Cas du flot sur les arcs

Supposons que les fonctions de coût sont strictement monotones, c'est-à-dire, il existe un flot d'équilibre unique. Nous pouvons alors écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité qui suit:

Proposition 5.1

Soit F, G et H, trois matrices symétriques et définies positives, $\rho_1$, $\rho_2$ et $\rho_3$, trois nombres réels strictement positifs, alors

$$P_\Omega [x^* - \rho_1 F^{-1}(Cx^* + \rho_2 G^{-1} J_C(x^*)^t (x^* - y^*))] = x^* \qquad (5.1)$$

$$P_\Omega [y^* - \rho_3 H^{-1} Cx^*] = y^* \qquad (5.2)$$

si et seulement si $x^* = y^*$ est le flot d'équilibre.

Preuve:

a) Supposons que $x^*=y^*$ est le flot d'équilibre unique, alors les conditions (5.1) et (5.2) peuvent s'écrire

$$P_\Omega [x^* - \rho_1 F^{-1} Cx^*] = x^* \qquad (5.3)$$

$$P_\Omega [x^* - \rho_3 H^{-1} Cx^*] = x^* \qquad (5.4)$$

Enfin, on a $(5.3) \iff (Cx^*, x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega$

et $(5.4) \iff (Cx^*, x - x^*) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega$ .

b) Supposons que les relations (5.1) et (5.2) sont satisfaites, nous obtenons après transformation (voir proposition 3.1):

$$(Cx^*+\rho_2 G^{-1} J_C(x^*)^t(x^*-y^*),\ x-x^*) \geq 0 \quad \forall\, x\in\Omega \tag{5.5}$$

$$(Cx^*, y-y^*) \geq 0 \qquad \forall\, y\in\Omega\ . \tag{5.6}$$

En posant $x=y^*$ et $y=x^*$ dans les relations (5.5) et (5.6) respectivement, et en additionnant ces deux inéquations, on peut écrire:

$$\rho_2 G^{-1}(J_C(x^*)^t(x^*-y^*),\ y^*-x^*) \geq 0$$

c'est-à-dire, $(J_C(x^*)^t(x^*-y^*),\ y^*-x^*) \geq 0$.

Or, Auslender (1976) démontre l'équivalence suivante:

. Cx est strictement monotone sur $\Omega$.

. $(J_C(x)^t(x-y), x-y) > 0 \qquad \forall\, x\neq y\in\Omega$.

D'où, $x^*=y^*$ et les relations (5.1) et (5.2) deviennent les relations (5.3) et (5.4). Par conséquent, $x^*=y^*$ est le flot d'équilibre. □

La proposition 5.1 suggère l'algorithme suivant:

<u>Etape 0</u>. Soit $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$; F, G, H symétriques et définies positives, soit $x^0, y^0 \in \Omega$ données.

Posons $k \leftarrow 0$.

<u>Etape 1</u>. Calculer

$$x^{k+1} = P_\Omega\,[x^k - \rho_1 F^{-1}(Cx^k + \rho_2 G^{-1} J_C(x^k)^t(x^k-y^k))] \tag{5.6}'$$

$$y^{k+1} = P_\Omega\,[y^k - \rho_3 H^{-1} Cx^k] \tag{5.6}''$$

Poser k←k+1 et aller à l'étape 1.

L'algorithme s'arrête lorsque $x^{k+1} = x^k$ et $y^{k+1} = y^k$.

Il reste à montrer que cet algorithme génère un point fixe. Pour ce faire, nous allons nous baser essentiellement sur l'approche utilisée par Dafermos (1980). Nous supposons la forte monotonie des fonctions de coût.

Proposition 5.2

Soit $\bar{\gamma}$ le maximum sur $\Omega$ de la valeur propre maximale de la matrice symétrique définie positive

$$[J_C(x)]\ F^{-1}[J_C(x)]^t \tag{5.7}$$

en posant $\rho_1=\rho_3$, F = H et G = I la matrice identité, en choisissant $\rho_1$ et $\rho_2$ telle que $\rho_1\rho_2 < 2\alpha/\bar{\gamma}$ où $\alpha$ est le paramètre de forte monotonie,

$$\lim_{k\to\infty} (Cx^k, x^k - y^k) = 0$$

et de plus, $\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F \le \lambda\|x^k-y^k\|_F$ où $\lambda=\{1-(1/\mu)\rho_1\rho_2(2\alpha-\bar{\gamma}\rho_1\rho_2)\}^{\frac{1}{2}}$

$\forall\ k \ge 0$, $\mu$ étant la valeur propre maximale de F, $\|x\| = (x^tFx)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve:

Soit $\{(x^k,y^k)\}_{k=0}^{\infty}$ une suite de points générés par l'algorithme précédent.

A l'aide de la proposition 3.1, on peut écrire:

$$[(x^{k+1}-x^k)+\rho_1 F^{-1}(Cx^k+\rho_2 J_C(x^k)^t(x^k-y^k))]^t(x-x^{k+1}) \ge 0 \quad \forall\ x\in\Omega \tag{5.8}$$

$$[(y^{k+1}-y^k)+\rho_1 F^{-1}Cx^k)]^t(y-y^{k+1}) \geq 0 \quad \forall\, y\in\Omega \tag{5.9}$$

En posant $x=y^{k+1}$ et $y=x^{k+1}$ respectivement dans les relations (5.8) et (5.9) et en additionnant les deux inéquations, nous obtenons

$$(x^{k+1}-y^{k+1})^t F(x^{k+1}-y^{k+1}) \leq [F(y^k-x^k) + \rho_1\rho_2\, J_C(x^k)^t(x^k-y^k))]^t(y^{k+1}-x^{k+1})$$

c'est-à-dire

$$\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F^2 \leq \{(y^k-x^k)+\rho_1\rho_2 F^{-1}\quad J_C(x^k)^t(x^k-y^k)\}^t\cdot F(y^{k+1}-x^{k+1})\ .$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz, cela devient

$$\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F \leq \|(y^k-x^k) + \rho_1\rho_2 F^{-1}\quad J_C(x^k)^t(x^k-y^k)\|_F\ ;$$

puis, en élevant au carré et en développant le côté droit, il arrive que

$$\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F^2 \leq \|x^k-y^k\|_F^2 + \rho_1^2\rho_2^2(x^k-y^k)^t J_C(x^k)\quad F^{-1}\ J_C(x^k)^t(x^k-y^k)$$

$$-\ 2\rho_1\rho_2(x^k-y^k)^t J_C(x^k)^t(x^k-y^k). \tag{5.9}'$$

Sachant que Cx est fortement monotone de rayon $a>0$, F est symétrique et définie positive,

$$\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F^2 \leq \|x^k-y^k\|_F^2 + \rho_1^2\rho_2^2\bar{\gamma}(x^k-y^k)^t(x^k-y^k)$$

$$-\ 2\rho_1\rho_2\ \alpha(x^k-y^k)^t(x^k-y^k)$$

$$= \|x^k-y^k\|_F^2 - \rho_1\rho_2[\,2\alpha-\bar{\gamma}\rho_1\rho_2](x^k-y^k)^t(x^k-y^k)\ .$$

Nous choisissons $\rho_1$ et $\rho_2$ telles que $\rho_1\rho_2 < 2\alpha/\bar{\gamma}$. Etant donné que $\|x^k-y^k\|_F^2 \leq \mu(x^k-y^k)^t(x^k-y^k)$, où $\mu$ est la valeur propre maximale de F, nous obtenons enfin

$$\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F^2 \leq \{1-(\tfrac{1}{\mu})\rho_1\rho_2(2\alpha-\bar{\gamma}\rho_1\rho_2)\}\ \|x^k-y^k\|_F^2 \tag{5.10}$$

La relation (5.10) indique la présence d'une contraction relativement à la norme $\|x\| = (x^t F x)^{\frac{1}{2}}$. D'où

$$\lim_{k\to\infty} (Cx^k, x^k - y^k) = 0 \quad . \tag{5.11}$$

Enfin, en posant $\lambda = \{1-(1/\mu)\rho_1\rho_2(2\alpha-\bar{\gamma}\rho_1\rho_2)\}^{\frac{1}{2}}$, la relation suivante est obtenue:

$$\|x^k - y^k\|_F \leq \lambda^k M \quad \text{où} \quad M = \|x^0 - y^0\|_F \quad \text{est fixé.} \qquad \square$$

Si l'on désire la meilleure vitesse de convergence, on devra choisir $\rho_1\rho_2 = \alpha/\bar{\gamma}$, de sorte que $\lambda = (1-\alpha^2/\mu\bar{\gamma})^{\frac{1}{2}}$. Par exemple, on peut prendre $\rho_1 = \alpha/\bar{\gamma}$ et $\rho_2 = 1$.

Nous allons maintenant montrer que l'algorithme précédent génère véritablement un point fixe.

Proposition 5.3

Supposons les conditions de la proposition 5.2 satisfaites et la continuité du Jacobien de la fonction de coût alors l'algorithme précédent génère un point fixe à la condition que $\rho_1 < 2\alpha/\gamma$, où $\gamma$ est le maximum sur $\Omega$ de la valeur propre maximale de la matrice symétrique définie positive

$$[J_C(x)]^t F^{-1} [J_C(x)] \quad . \tag{5.11}'$$

Preuve

Soit $\{(x^k, y^k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{(\bar{x}^k, \bar{y}^k)\}_{k=0}^{\infty}$ deux suites de points possiblement générées par cet algorithme.

A l'aide de la proposition 3.1, on peut écrire:

$$[x^{k+1} - x^k + \rho_1 F^{-1}\{Cx^k + \rho_2 J_C(x^k)^t (x^k - y^k))]^t (x - x^{k+1}) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega \tag{5.12}$$

$$[\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k + \rho_1 F^{-1}\{C\bar{x}^k + \rho_2 J_C(\bar{x}^k)^t (\bar{x}^k - \bar{y}^k))](x - \bar{x}^{k+1}) \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega \; . \tag{5.13}$$

En posant $x = \bar{x}^{k+1}$ et $x = x^{k+1}$ dans (5.12) et (5.13) respectivement, et en additionnant les deux inéquations, nous obtenons:

$$\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F^2 \le [(\bar{x}^k-x^k)+\rho_1 F^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k+\rho_2(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k)))]^t \cdot F(\bar{x}^{k+1}-x^{k+1}) .$$

En appliquant l'inégalité de Schwartz, cela devient

$$\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F \le \|\bar{x}^k-x^k+\rho_1 F^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k+\rho_2(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k)))\|_F ;$$

en élevant au carré et en développant le côté droit de cette inégalité, il arrive que

$$\begin{aligned}\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F^2 \le{}& \|x^k-\bar{x}^k\|_F^2+\rho_1^2(Cx^k-C\bar{x}^k)^t F^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k)-2\rho_1(Cx^k-C\bar{x}^k,x^k-\bar{x}^k)\\ &+\rho_1^2\rho_2^2(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))^t F^{-1}(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\\ &-2\rho_1\rho_2(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))^t(x^k-\bar{x}^k)\\ &+2\rho_1^2\rho_2(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))^t F^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k).\end{aligned}$$

En se servant encore de l'inégalité de Schwartz, on obtient:

$$\begin{aligned}\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F^2 \le{}& \|x^k-\bar{x}^k\|_F^2+\rho_1^2(Cx^k-C\bar{x}^k)^t F^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k)-2\rho_1(Cx^k-C\bar{x}^k,x^k-\bar{x}^k) \qquad (5.14)\\ &+\rho_1^2\rho_2^2\|F^{-1}(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F^2\\ &+2\rho_1\rho_2\|F^{-1}(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F\cdot\|x^k-\bar{x}^k\|_F\\ &+2\rho_1^2\rho_2\|F^{-1}(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F\cdot\|F^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k)\|_F .\end{aligned}$$

Déterminons maintenant une borne supérieure à la quantité

$$\|F^{-1}(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F. \qquad (5.14)'$$

Puisque le Jacobien des fonctions de coût est continu et par conséquent borné, on peut poser $\tilde{\gamma}=\underset{x\in\Omega}{\text{Max}}\|J_C(x)^t\|_F$ où $\|J_C(x)^t\|_F$ est la plus petite valeur de N(x) satisfaisant la relation $\|J_C(x)^t y\| \le N(x)\|y\|_F \ \forall\ y\in\Omega$ .

D'où

$$\|F^{-1}(J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F \le (\tfrac{1}{\bar{\mu}})\|J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k)\|_F$$

où $\bar{\mu}$ est la valeur propre minimale de F,

$$(5.14)' \le (\tfrac{1}{\bar{\mu}})\{\|J_C(x^k)^t(x^k-y^k)\|_F+\|J_C(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k)\|_F\}$$

d'après l'inégalité du triangle,

$$(5.14)' \le (\tfrac{\tilde{\gamma}}{\bar{\mu}})\ \{\|x^k-y^k\|_F+\|\bar{x}^k-\bar{y}^k\|_F\}$$

$$(5.14)' \le (\tfrac{\tilde{\gamma}}{\bar{\mu}})\ \lambda^k\{\|x^0-y^0\|_F+\|\bar{x}^0-\bar{y}^0\|_F\}$$

d'après la proposition 5.2,

$$(5.14)' \le a\ \lambda^k \quad \text{où} \quad a=(\tfrac{\tilde{\gamma}}{\bar{\mu}})\ \{\|x^0-y^0\|_F+\|\bar{x}^0-\bar{y}^0\|_F\} \qquad (5.15)$$

est une constante.

Remarquons que cette quantité décroît strictement vers 0 à mesure que k croît.

De plus,

$$\|F^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k)\|_F^2=(Cx^k-C\bar{x}^k)^tF^{-1}(Cx^k-C\bar{x}^k) \quad \text{par définition de } \|\cdot\|_F \ ,$$

$$\le (x^k-\bar{x}^k)^t[\partial c/\partial x]^tF^{-1}[\partial c/\partial x])x^k-\bar{x}^k) \quad \text{d'après}$$

l'appendice 2 de Dafermos (1980).

$$\leq \gamma(x^k-\bar{x}^k)^t(x^k-\bar{x}^k) \qquad \text{d'après (5.7)}$$

$$\leq (\gamma/\bar{u})\|x^k-\bar{x}^k\|_F^2 \qquad \text{où } \bar{u} \text{ est la valeur propre minimale de F.} \qquad (6.16)$$

A partir de (5.15), (5.16) et du fait que la fonction de coût est fortement monotone de rayon $\alpha > 0$ , l'inégalité (5.14) peut maintenant s'écrire plus simplement:

$$\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F^2 \leq \{1-(1/u)\rho_1(2\alpha-\gamma\rho_1)\} \cdot \|x^k-\bar{x}^k\|_F^2$$

$$+ a\ \lambda^k \cdot \{\rho_1^2\rho_2^2 a\lambda^k + 2\rho_1\rho_2\|x^k-\bar{x}^k\|_F + 2\rho_1^2\rho_2(\gamma/\bar{u})^{\frac{1}{2}}\|x^k-\bar{x}^k\|_F \qquad (5.17)$$

Posons $\bar{\lambda} = \{1-(1/u)\rho_1(2\alpha-\gamma\rho_1)\}$. Sachant que $\Omega$ est un ensemble compact, alors la quantité $\|x^k-\bar{x}^k\|_F$ est bornée pour tout $k \geq 0$ de sorte qu'il existe une borne supérieure b finie aux éléments de la suite $\{a\cdot(\rho_1^2\rho_2^2 a\lambda^k + 2\rho_1\rho_2\|x^k-\bar{x}^k\|_F + 2\rho_1^2\rho_2(\gamma/\bar{u})^{\frac{1}{2}}\|x^k-\bar{x}^k\|_F)\}_{k\geq 0}^{\infty}$ .

Par conséquent (5.17) peut encore s'écrire:

$$\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F^2 \leq \bar{\lambda} \cdot \|x^k-\bar{x}^k\|_F^2 + b\lambda^k, \qquad (5.18)$$

En procédant par induction, on obtient de (5.18):

$$\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F^2 \leq \bar{\lambda}^{k+1} \cdot \|x^0-\bar{x}^0\|_F^2 + b\ k\tilde{\lambda}^k \qquad \text{où } \tilde{\lambda}=\text{Max}\ \{\lambda,\bar{\lambda}\}. \qquad (5.19)$$

Choisissons $\rho_1 < 2\alpha/\gamma$. Ainsi, $\bar{\lambda},\tilde{\lambda} \in (0,1)$.

Lorsque k croît, le côté droit de l'inégalité (5.19) tend vers 0. Par conséquent, $\|x^k-\bar{x}^k\|_F \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Ce résultat nous permet de conclure que l'algorithme génère un point fixe pour la relation (5.6)'. De plus, en regard de la proposition (5.2), le résultat de la proposition (5.3) s'ensuit.

□

Réécrivons maintenant le schéma itératif précédent dans le cadre des propositions (5.2) et (5.3):

$$x^{k+1} = P_{\Omega}(x^k - \rho_1 F^{-1}(Cx^k + \rho_2 J_C(x^k)^t(x^k - y^k))), \tag{5.20}$$

$$y^{k+1} = P_{\Omega}(y^k - \rho_1 F^{-1} Cx^k); \quad k=0,1,2,\ldots \tag{5.21}$$

On remarque que les deux conditions $\rho_1\rho_2 < 2\alpha/\bar{\gamma}$ et $\rho_1 < 2\alpha/\gamma$ sont satisfaites lorsque $\rho_1 < \frac{2\alpha}{\gamma}$ et $\rho_2 \leq \gamma/\bar{\gamma}$. De plus, les valeurs suivantes de $\rho_1$ et $\rho_2$ devraient être très judicieuses pour une convergence accélérée: $\rho_1 = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $\rho_2 = \gamma/\bar{\gamma}$.

Enfin, en prenant $x^0 = y^0$ et/ou $\rho_2 = 0$, on obtient l'algorithme de Dafermos (1980).

Un cas particulier très intéressant est celui où les fonctions de coût sont affines; (5.20) et (5.21) s'écrivent alors:

$$x^{k+1} = P_{\Omega}(x^k - \rho_1 F^{-1}(Cx^k + \rho_2 A^t(x^k - y^k))) \tag{5.22}$$

$$y^{k+1} = P_{\Omega}(y^k - \rho_1 F^{-1} Cx^k) \tag{5.23}$$

où $Cx = Ax + b$.

Considérons maintenant la résolution des problèmes (5.8) et (5.9). Il s'agit de déterminer un point d'équilibre lorsque les fonctions de coût sont affines, symétriques et définies positives. Ces fonctions de coût sont de la forme $Fx+(\rho_1 Cx^k+\rho_1\rho_2 J_C(x^k)^t(x^k-y^k)-Fx^k)$ et $Fy+(\rho_1 Cx^k - Fy^k)$ respectivement.

Un dernier point reste à traiter. Nous voulons un estimé du taux de convergence.

**Proposition 5.4**

Soit $x^*$ l'unique flot d'équilibre. Si $(x^0,y^0)$ est le point initial de l'algorithme, alors

$$\|x^k-x^*\|_F^2 \leq \bar{\lambda}^k \cdot \|x^0-x^*\|_F^2 + bk\tilde{\lambda}^k. \tag{5.24}$$

De plus,
$$\|y^k-x^*\|_F \leq \|x^k-x^*\|_F + \lambda^{k/2} \|x^0-y^0\|_F \quad . \tag{5.25}$$

**Preuve**

En posant dans la proposition 5.3, $\bar{x}^0 = x^* = \bar{y}^0$, l'algorithme génère la suite de points $\{(\bar{x}^k,\bar{y}^k)\}_{k=0}^{\infty}$ tels que $(\bar{x}^k,\bar{y}^k) = (x^*,x^*)$ $\forall$ $k \geq 0$, en supposant que le critère d'arrêt de l'algorithme est omis et qu'on laisse le processus se dérouler indéfiniment. Il s'agit alors de poser $\bar{x}^0 = x^* = \bar{y}^0$ dans la relation (5.19) pour obtenir (5.24).

La relation (5.25) découle directement de (5.24), de la proposition 5.2 et de l'inégalité de Schwartz.

□

Dans la prochaine section, nous appliquerons les principaux algorithmes de projection, de sous-gradient étudiés jusqu'à maintenant.

## 6. Exemple de Dafermos (1980)

Examinons brièvement le comportement des algorithmes précédents sur un tout petit réseau (Dafermos, 1980).

Considérons le réseau simple suivant composé des arcs $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$ et $b_2$.

Le vecteur de demande est: $d_{xy} = 210$ et $d_{yx} = 120$.

Les fonctions de coût sont:

$$c_{a_1} = 10x_{a_1} + 5x_{b_1} + 1000$$

$$c_{a_2} = 15x_{a_2} + 5x_{b_2} + 950$$

$$c_{a_3} = 20x_{a_3} + 3000$$

$$c_{b_1} = 20x_{b_1} + 2x_{a_1} + 1000$$

$$c_{b_2} = 25x_{b_2} + x_{a_2} + 1300.$$

La solution d'équilibre est $x^* = (120, 90, 0, 70, 50)$.

Un calcul simple nous donne comme paramètre de forte monotonie $\alpha = 8.9$. Choisissons $F = \text{diag}[10,15,20,20,25]$. Nous obtenons alors $\gamma = 29.8$ relativement à la matrice (5.11)'.

Considérons en premier les fonctions de coût associées à (5.22) sous la forme

$$Fx+h^k \quad \text{où} \quad h^k = [\rho_1(1+\rho_2)Cx^k - \rho_1\rho_2 Cy^k - Fx^k] ,$$

puis, celles associées à (5.23) sour la forme

$$Fy+g^k \quad \text{où} \quad g^k = [\rho_1 Cx^k - Fy^k] .$$

Les deux problèmes d'équilibre correspondants ont été résolus explicitement par Dafermos (1980). La solution est la suivante:

$$z_{a_1} = 96.9 - 0.0538f_{a_1} + 0.0308f_{a_2} + 0.0230f_{a_3}$$

$$z_{a_2} = 64.6 + 0.0308f_{a_1} - 0.0462f_{a_2} + 0.0154f_{a_3}$$

$$z_{a_3} = 48.5 + 0.0230f_{a_1} + 0.0154f_{a_2} - 0.0384f_{a_3}$$

$$z_{b_1} = 66.7 + 0.0222(f_{b_2} - f_{b_1})$$

$$z_{b_2} = 53.3 - 0.0222(f_{b_2} - f_{b_1})$$

lorsque $z_{a_3} > 0$, ou par

$$z_{a_1} = 126 + 0.04(f_{a_2} - f_{a_1})$$

$$z_{a_2} = 84 - 0.04(f_{a_2} - f_{a_1})$$

$$z_{a_3} = 0$$

$$z_{b_1} = 66.7 + 0.0222(f_{b_2} - f_{b_1})$$

$$z_{b_2} = 53.3 - 0.0222(f_{b_2} - f_{b_1}), \quad \text{dans le cas contraire.}$$

Lorsque le problème (5.22) est à résoudre, les vecteurs z et f sont remplacés par $x^{k+1}$ et $h^k$ respectivement, tandis que le problème (5.23) fait intervenir les vecteurs $y^{k+1}$ et $g^k$ respectivement.

Posons $x^0 = (70,70,70,60,60)$, $y^0 = (80,70,60,60,60)$. Le résultat des calculs est donné à la Table 1.

Certes, cet exemple seul est beaucoup trop petit pour nous permettre de conclure quoi que ce soit à propos de l'algorithme de la section 5. Il est difficile de voir l'influence des solutions initiales $x^0$ et $y^0$ et de la valeur des paramètres $\rho_1$ et $\rho_2$. Par contre, la suite $\{y^k\}$ semble converger légèrement plus lentement que la suite $\{x^k\}$. Cela correspond bien au résultat de la proposition 5.4.

L'algorithme de Dafermos et notre algorithme général se comparent sensiblement au point de vue de la vitesse de convergence (voir Tableau 1). Malheureusement, ce dernier exige la résolution de deux sous-problèmes au lieu d'un seul. Par conséquent, il semble préférable d'utiliser celui de Dafermos, un cas spécial de notre algorithme général. Deux variantes de l'algorithme de la section 5 ont été démontrées convergentes expérimentalement. Elles consistent à remplacer $Cx^k$ par $Cx^{k+1}$ et $y^k$ par $x^{k+1}$ respectivement dans la relation (5.6)". Des résultats au moins aussi bons sont obtenus (tableau II).

Dans le tableau 3, nous avons considéré le schéma itératif:
$x^{k+1} = P_\Omega(x^k - \alpha_k F^{-1} Cx^k)$, $k=0,1,2,\ldots$ où $\alpha_k = 1/k+1$ et $\alpha_k = (Cx^k - Cx^{k-1}, x^k - x^{k-1})/\|F^{-1}(Cx^k - Cx^{k-1})\|_F^2$.

Dans le tableau 4, ce sont les algorithmes énoncés à la proposition 4.1 et 4.2.

Nous remarquons facilement que les algorithmes des tableaux 1 à 3 et ceux du tableau 4 forment deux classes bien distinctes. Ceux du tableau 4 semblent vraiment impraticables; leur vitesse de convergence est beaucoup trop lente. Toutefois, c'est l'algorithme énoncé à la proposition 4.2 lorsque $\lambda_k = 1.999999 \simeq 2.0 \quad \forall\, k \geq 0$ qui est de loin le plus performant dans ceux de la table 4.

Enfin, l'algorithme qui semble le plus performant est celui de Sibony à la section 3 (voir tableau 3). Il donne une solution optimale à une décimale près après seulement quatre itérations. Un autre avantage sérieux est que $\alpha_k$ se calcule à l'itération k à partir des points $x^k$ et $x^{k-1}$ seulement. Il n'est pas nécessaire, comme dans l'algorithme de Dafermos (1980) par exemple, de satisfaire la condition $\alpha_k < 2\alpha/\gamma$ pour tout k; cette constante n'est pas connue généralement.

TABLEAU 1

| Type d'algorithme | $\rho_1$ | $\rho_2$ | Iter. No k | Type de flots | Arc A1 | Arc A2 | Arc A3 | Arc B1 | Arc B2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dafermos $x^0 = y^0$ | 0.3 | 0.0 | 0 | x | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| | | | 1 | x | 89.35 | 76.92 | 43.72 | 63.56 | 56.43 |
| | | | 2 | x | 102.40 | 82.18 | 25.41 | 65.85 | 54.14 |
| | | | 3 | x | 111.23 | 86.13 | 12.63 | 67.31 | 52.68 |
| | | | 4 | x | 117.20 | 89.06 | 3.72 | 68.24 | 51.75 |
| | | | 5 | x | 119.82 | 90.17 | 0.00 | 68.83 | 51.16 |
| | | | 6 | x | 120.01 | 89.98 | 0.00 | 69.21 | 50.78 |
| | | | 7 | x | 120.10 | 89.89 | 0.00 | 69.48 | 50.51 |
| | | | 8 | x | 120.13 | 89.86 | 0.00 | 69.66 | 50.33 |
| | | | 9 | x | 120.13 | 89.86 | 0.00 | 69.79 | 50.20 |
| | | | 10 | x | 120.11 | 89.88 | 0.00 | 69.88 | 50.11 |
| Général | 0.3 | 1.0 | | x | 70.0 | 70.0 | 70.0 | 60.0 | 60.0 |
| | | | 0 | y | 80.0 | 70.0 | 60.0 | 60.0 | 60.0 |
| | | | | x | 92.34 | 76.92 | 40.73 | 63.90 | 56.09 |
| | | | 1 | y | 99.33 | 76.92 | 33.74 | 63.56 | 56.43 |
| | | | | x | 106.53 | 82.23 | 21.23 | 66.18 | 53.81 |
| | | | 2 | y | 111.42 | 82.21 | 16.35 | 65.71 | 54.28 |
| | | | | x | 115.52 | 86.21 | 8.26 | 67.51 | 52.48 |
| | | | 3 | y | 118.95 | 86.19 | 4.84 | 67.02 | 52.97 |
| | | | | x | 121.03 | 88.96 | 0.00 | 68.29 | 51.70 |
| | | | 4 | y | 122.02 | 87.97 | 0.00 | 67.83 | 52.16 |
| | | | | x | 121.20 | 88.79 | 0.00 | 68.74 | 51.25 |
| | | | 5 | y | 121.91 | 88.08 | 0.00 | 68.35 | 51.64 |
| | | | | x | 121.19 | 88.80 | 0.00 | 69.05 | 50.94 |
| | | | 6 | y | 121.70 | 88.29 | 0.00 | 68.74 | 51.25 |
| | | | | x | 121.09 | 88.90 | 0.00 | 69.28 | 50.71 |
| | | | 7 | y | 121.46 | 88.53 | 0.00 | 69.03 | 50.96 |
| | | | | x | 120.95 | 89.04 | 0.00 | 69.45 | 50.54 |
| | | | 8 | y | 121.21 | 88.78 | 0.00 | 69.25 | 50.74 |
| | | | | x | 120.80 | 89.19 | 0.00 | 69.58 | 50.41 |
| | | | 9 | y | 120.99 | 89.00 | 0.00 | 69.42 | 50.57 |
| | | | | x | 120.66 | 89.33 | 0.00 | 69.69 | 50.30 |
| | | | 10 | y | 120.80 | 89.19 | 0.00 | 69.56 | 50.43 |

TABLEAU 2

| Type d'algorithme | $\rho_1$ | $\rho_2$ | Iter. No k | Type de flots | Arc A1 | Arc A2 | Arc A3 | Arc B1 | Arc B2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variante 1 | 0.3 | 1.0 | 0 | x | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| | | | | y | 80.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 | 60.00 |
| | | | 1 | x | 92.34 | 76.92 | 40.73 | 63.90 | 56.09 |
| | | | | y | 92.15 | 75,29 | 42.55 | 62.14 | 57.85 |
| | | | 2 | x | 104.32 | 81.78 | 23.88 | 65.56 | 54.43 |
| | | | | y | 100.47 | 79.32 | 30.20 | 63.66 | 56.33 |
| | | | 3 | x | 111.37 | 85.14 | 13.47 | 66.46 | 53.53 |
| | | | | y | 106.54 | 82.45 | 21.00 | 64.84 | 55.15 |
| | | | 4 | x | 115.90 | 87,52 | 6.57 | 67.08 | 52.91 |
| | | | | y | 111.16 | 84.93 | 13.89 | 65.79 | 54.20 |
| | | | 5 | x | 119.02 | 89.28 | 1.69 | 67.57 | 52.42 |
| | | | | y | 114.77 | 86.95 | 8.26 | 66.56 | 53.43 |
| | | | 6 | x | 120.19 | 89.80 | 0.00 | 67.97 | 52.02 |
| | | | | y | 117.97 | 88.86 | 3.15 | 67.19 | 52.80 |
| | | | 7 | x | 120.25 | 89.74 | 0.00 | 68.33 | 51.66 |
| | | | | y | 119.99 | 90.00 | 0.00 | 67.72 | 52.27 |
| | | | 8 | x | 120.27 | 89.72 | 0.00 | 68.66 | 51.33 |
| | | | | y | 120.07 | 89.92 | 0.00 | 68.15 | 51.84 |
| | | | 9 | x | 120.27 | 89.72 | 0.00 | 68.92 | 51.07 |
| | | | | y | 120.11 | 89.88 | 0.00 | 68.50 | 51.49 |
| | | | 10 | x | 120.25 | 89.74 | 0.00 | 69.13 | 50.86 |
| | | | | y | 120.14 | 89.85 | 0.00 | 68.78 | 51.21 |

$$x^{k+1} = P_\Omega(x^k - \rho_1 F^{-1}(Cx^k + \rho_2 J_C(x^k)^t(x^k - y^k)))$$
$$y^{k+1} = P_\Omega(y^k - \rho_1 F^{-1} Cx^{k+1})$$



. . . /

TABLEAU 2 (suite)

| Type d'algorithme | $\rho_1$ | $\rho_2$ | Iter. No k | Type de flots | Arc A1 | Arc A2 | Arc A3 | Arc B1 | Arc B2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variante 2 | 0.3 | 0.1 | 0 | x | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| | | | | y | 80.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 | 60.00 |
| | | | 1 | x | 92.34 | 76.92 | 40.73 | 63.90 | 56.09 |
| | | | | y | 111.63 | 83.84 | 14.51 | 67.46 | 52.53 |
| | | | 2 | x | 110.37 | 84.18 | 15.43 | 67.52 | 52.47 |
| | | | | y | 121.33 | 88.66 | 0.00 | 69.66 | 50.33 |
| | | | 3 | x | 119.95 | 89.00 | 1.04 | 69.24 | 50.75 |
| | | | | y | 120.98 | 89.01 | 0.00 | 70.10 | 49.89 |
| | | | 4 | x | 120.64 | 89.35 | 0.00 | 69.79 | 50.20 |
| | | | | y | 120.56 | 89.43 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| | | | 5 | x | 120.46 | 89.53 | 0.00 | 69.93 | 50.06 |
| | | | | y | 120.29 | 89.70 | 0.00 | 70.01 | 49.98 |
| | | | 6 | x | 120.28 | 89.71 | 0.00 | 69.99 | 50.00 |
| | | | | y | 120.15 | 89.84 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| | | | 7 | x | 120.16 | 89.83 | 0.00 | 70.02 | 49.97 |
| | | | | y | 120.07 | 89.92 | 0.00 | 70.04 | 49.95 |
| | | | 8 | x | 120.08 | 89.91 | 0.00 | 70.04 | 49.95 |
| | | | | y | 120.03 | 89.96 | 0.00 | 70.06 | 49.93 |
| | | | 9 | x | 120.04 | 89.95 | 0.00 | 70.06 | 49.93 |
| | | | | y | 120.00 | 89.99 | 0.00 | 70.07 | 49.92 |
| | | | 10 | x | 120.01 | 89.98 | 0.00 | 70.07 | 49.92 |
| | | | | y | 119.99 | 90.00 | 0.00 | 70.08 | 49.91 |

$$x^{k+1} = P_\Omega(x^k - \rho_1 F^{-1}(Cx^k + \rho_2 J_C(x^k)^t(x^k - y^k)))$$

$$y^{k+1} = P_\Omega(x^{k+1} - \rho_1 F^{-1} Cx^k)$$

## TABLEAU 3

| Type d'algorithme | $\rho_1$ | $\rho_2$ | Iter. No k | Type de flots | Arc A1 | Arc A2 | Arc A3 | Arc B1 | Arc B2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^0 = y^0$ | 1 | 0.0 | 0 | x | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| | 1/2 | | 1 | x | 124.00 | 86.00 | 0.00 | 71.80 | 48.19 |
| | 1/3 | | 2 | x | 121.63 | 88.36 | 0.00 | 70.79 | 49.20 |
| | 1/4 | | 3 | x | 120.98 | 89.01 | 0.00 | 70.52 | 49.47 |
| | 1/5 | | 4 | x | 120.68 | 89.31 | 0.00 | 70.40 | 49.59 |
| | 1/6 | | 5 | x | 120.51 | 89.48 | 0.00 | 70.34 | 49.65 |
| | 1/7 | | 6 | x | 120.40 | 89.59 | 0.00 | 70.31 | 49.68 |
| | 1/8 | | 7 | x | 120.33 | 89.66 | 0.00 | 70.29 | 49.70 |
| | 1/9 | | 8 | x | 120.27 | 89.72 | 0.00 | 70.28 | 49.71 |
| | 1/10 | | 9 | x | 120.23 | 89.76 | 0.00 | 70.28 | 49.71 |
| | 1/11 | | 10 | x | 120.19 | 89.80 | 0.00 | 70.28 | 49.71 |
| $x^0 = y^0$ | 0.3 | 0.0 | 0 | x | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| | 0.976312 | | 1 | x | 89.35 | 76.92 | 43.72 | 63.56 | 56.43 |
| | 0.970138 | | 2 | x | 122.40 | 87.59 | 0.00 | 70.92 | 49.07 |
| | 0.863220 | | 3 | x | 119.71 | 90.28 | 0.00 | 69.90 | 50.09 |
| | 0.849988 | | 4 | x | 119.99 | 90.00 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| (1) | 0.161530 | | 5 | x | 119.98 | 90.01 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| | 0.871766 | | 6 | x | 119.98 | 90.01 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| | 0.871766 | | 7 | x | 119.98 | 90.01 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| | 0.871766 | | 8 | x | 119.98 | 90.01 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| | 0.871766 | | 9 | x | 119.98 | 90.01 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |
| | 0.871766 | | 10 | x | 119.98 | 90.01 | 0.00 | 70.03 | 49.96 |

(1) $$\rho_1^k = \frac{(Cx^k - Cx^{k-1})^t (x^k - x^{k-1})}{(Cx^k - Cx^{k-1})^t G^{-1} (Cx^k - Cx^{k-1})}$$

TABLEAU 4

| Type d'algorithme | Iter. No k | $\lambda_k$ | $\alpha_k$ | Arc A1 | Arc A2 | Arc A3 | Arc B1 | Arc B2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{k+1}=P_\Omega(x^k-\alpha_k(Cx^k+J_C(x^k)^t(x^k-u^k)))$ | 0 | 1 | 0.000121 | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| | 1 | 1/2 | 0.000061 | 70.33 | 69.97 | 69.68 | 60.25 | 59.74 |
| où | 2 | 1/3 | 0.000041 | 70.50 | 69.96 | 69.53 | 60.38 | 59.61 |
| $u^k$ est le p.c.c. associé à $Cx^k$ | 3 | 1/4 | 0.000030 | 70.61 | 69.95 | 69.42 | 60.47 | 59.52 |
| | 4 | 1/5 | 0.000024 | 70.69 | 69.95 | 69.35 | 60.53 | 59.46 |
| $\alpha_k=\lambda_k/\|Cx^k+J_C(x^k)^t(x^k-u^k)\|$ | 5 | 1/6 | 0.000020 | 70.76 | 69.95 | 69.28 | 60.59 | 59.40 |
| | 6 | 1/7 | 0.000017 | 70.81 | 69.94 | 69.23 | 60.63 | 59.36 |
| $\lambda_k \to 0$ | 7 | 1/8 | 0.000015 | 70.86 | 69.94 | 69.19 | 60.67 | 59.32 |
| | 8 | 1/9 | 0.000014 | 70.90 | 69.94 | 69.15 | 60.70 | 59.29 |
| | 9 | 1/10 | 0.000012 | 70.94 | 69.93 | 69.12 | 60.73 | 59.26 |
| $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$ | 10 | 1/11 | 0.000011 | 70.97 | 69.93 | 69.08 | 60.75 | 59.24 |
| | 100 | 1/101 | 0.000001 | 71.72 | 69.88 | 68.39 | 61.33 | 58.66 |
| | 200 | 1/201 | 0.000001 | 71.95 | 69.87 | 68.17 | 61.50 | 59.49 |
| $x^{k+1}=P_\Omega(x^k-\alpha_k(Cx^k+J_C(x^k)^t(x^k-u^k)))$ | 0 | 1.0 | 0.003248 | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| | 1 | 1.0 | 0.002443 | 78.93 | 69.41 | 61.65 | 66.95 | 53.04 |
| où $u^k$ est le p.c.c. associé à $Cx^k$, | 2 | 1.0 | 0.002119 | 84.96 | 68.98 | 56.05 | 71.33 | 48.66 |
| | 3 | 1.0 | 0.001717 | 89.36 | 68.95 | 51.67 | 68.94 | 51.05 |
| | 4 | 1.0 | 0.001683 | 93.10 | 68.58 | 48.31 | 71.81 | 48.18 |
| $\alpha_k = \dfrac{\lambda_k \cdot (Cx^k, x^k-u^k)}{\|Cx^k+J_C(x^k)^t(x^k-u^k)\|^2}$, | 5 | 1.0 | 0.001494 | 92.11 | 73.20 | 44.68 | 68.06 | 51.93 |
| | 6 | 1.0 | 0.001459 | 95.24 | 72.63 | 42.12 | 70.61 | 49.38 |
| | 7 | 1.0 | 0.001313 | 94.58 | 76.18 | 39.23 | 71.39 | 48.60 |
| | 8 | 1.0 | 0.001065 | 96.94 | 75.76 | 37.29 | 69.89 | 50.10 |
| $0 < \varepsilon_1 \le \lambda_k \le 2-\varepsilon_2$, | 9 | 1.0 | 0.001062 | 99.01 | 75.24 | 35.74 | 71.61 | 48.38 |
| | 10 | 1.0 | 0.000997 | 98.19 | 77.88 | 33.91 | 69.26 | 50.73 |
| $\varepsilon_2 > 0$ | 100 | 1.0 | 0.000122 | 115.14 | 87.16 | 7.68 | 70.01 | 49.98 |
| | 200 | 1.0 | 0.000053 | 117.60 | 88.56 | 3.83 | 69.97 | 50.02 |

. . . /

TABLEAU 4 (suite)

| Type d'algorithme | Iter. No k | $\alpha_k$ | $\lambda_k$ | Arc A1 | Arc A2 | Arc A3 | Arc B1 | Arc B2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{k+1}=P_\Omega(x^k-\alpha_k(Cx^k+J_C(x^k)^t(x^k-u^k)))$ | 0 | 1.999999 | 0.006497 | 70.00 | 70.00 | 70.00 | 60.00 | 60.00 |
| où $u^k$ est le p.c.c. associé à $Cx^k$, | 1 | 1.999999 | 0.003853 | 87.86 | 68.83 | 53.30 | 73.90 | 46.09 |
| $\alpha_k=\frac{\lambda_k\cdot(Cx^k,x^k-u^k)}{\|Cx^k+J_C(x^k)^t(x^k-u^k)\|^2}$, | 2 | 1.999999 | 0.003773 | 86.07 | 79.57 | 44.35 | 65.03 | 54.96 |
| | 3 | 1.999999 | 0.002645 | 94.58 | 77.40 | 38.00 | 72.14 | 47.85 |
| | 4 | 1.999999 | 0.001929 | 99.31 | 76.47 | 34.21 | 69.05 | 50.94 |
| $0<\varepsilon_1\leq\lambda_k\leq 2-\varepsilon_2$, | 5 | 1.999999 | 0.002090 | 102.95 | 75.44 | 31.60 | 72.23 | 47.76 |
| | 6 | 1.999999 | 0.001821 | 101.11 | 80.57 | 28.30 | 67.51 | 52.48 |
| $\varepsilon_2>0$. | 7 | 1.999999 | 0.001263 | 104.46 | 79.31 | 26.22 | 70.65 | 49.34 |
| | 8 | 1.999999 | 0.001533 | 103.29 | 82.22 | 24.47 | 67.89 | 52.10 |
| | 9 | 1.999999 | 0.001100 | 106.00 | 81.06 | 22.92 | 70.51 | 49.48 |
| | 10 | 1.999999 | 0.001251 | 107.64 | 80.44 | 21.91 | 69.27 | 50.72 |
| | 100 | 1.999999 | 0.000106 | 117.82 | 88.84 | 3.32 | 69.95 | 50.04 |
| | 200 | 1.999999 | 0.000036 | 119.22 | 89.55 | 1.21 | 69.96 | 50.03 |

## 7. Généralisation des méthodes de projection pour résoudre un problème d'équilibre général: cas du flot sur les chemins

Dans cette section, nous allons suivre l'exemple de Bertsekas et Gafni (1980) qui effectuent une transformation de variables afin de pouvoir considérer directement les variables de flots sur les chemins. Nous reprendrons les résultats obtenus à la section 5 après cette transformation.

A moins d'avis contraire, les variables utilisées ci-après désignent le flot sur les chemins. Posons

$\overline{C}x = A^t CAx$ la fonction de coût sur les chemins, où A est la matrice d'incidence arc-chemin.

On peut noter que $J_{\overline{C}}(x)$, désignant le Jacobien de $\overline{C}$ par rapport à x est égale à $A^t J_C(Ax)A$, où Ax est le flot sur les arcs associé à x.

Mentionnons aussi que $\Omega^*$, l'ensemble des solutions de l'inégalité variationnelle

$$x^* \in \Omega,\ (A^t C(Ax^*), x-x^*) \geq 0 \qquad \forall\ x \in \Omega \tag{7.1}$$

est polyhédrique, car $\Omega^* = \{x \in \Omega \mid Ax = z^*\}$ où $z^*$ est l'unique flot sur les arcs à l'équilibre. Nous allons maintenant écrire la condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour le calcul d'un flot d'équilibre. Les fonctions de coût sur les arcs sont supposées strictement monotones.

Proposition 7.1

Soit F, G et H, trois matrices symétriques et définies positives, $\rho_1$, $\rho_2$ et $\rho_3$ trois nombres réels strictement positifs, alors

$$P_{\Omega}\,[x^*-\rho_1 F^{-1}(\bar{C}x^*+\rho_2 G^{-1} J_{\bar{C}}(x^*)^t(x^*-y^*))] = x^* \qquad (7.2)$$

$$P_{\Omega}\,[y^*-\rho_3 H^{-1}\bar{C}x^*] = y^* \qquad (7.3)$$

si et seulement si

$Ax^* = Ay^* = z^*$ est l'unique flot sur les arcs à l'équilibre.

Preuve

Très similaire à celle de la proposition 5.1.

L'algorithme de la section 5 peut maintenant s'écrire: ($\Omega$ représente l'ensemble réalisable des flots sur les chemins).

Etape 0. Soit $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$; F, G, H symétriques et définies positives, soit $x^0, y^0 \in \Omega$ donnés.

Posons $k \leftarrow 0$ .

Etape 1. Calculer

$$x^{k+1} = P_{\Omega}\,[x^k-\rho_1 F^{-1}(\bar{C}x^k+\rho_2 G^{-1} J_{\bar{C}}(x^k)^t(x^k-y^k))] \qquad (7.4)$$

$$y^{k+1} = P_{\Omega}\,[y^k-\rho_3 H^{-1}\bar{C}x^k] \qquad (7.5)$$

Poser $k \leftarrow k+1$. Aller à l'étape 1.

L'algorithme s'arrête lorsque $x^{k+1} = x^k$ et $y^{k+1} = y^k$.

En supposant la forte monotonie des fonctions de coût sur les arcs, nous voulons montrer que cet algorithme génère un point fixe. La condition de Lipschitz des fonctions de coût sur les arcs n'a pas été utilisée ici.

Proposition 7.2

Soit $\bar{\gamma}$ le maximum sur $\Omega$ de la valeur propre maximale de la matrice symétrique définie positive $[J_C(Ax)]\ AF^{-1}\ A^t\ [J_C(Ax)]^t$, (7.6)

en posant $\rho_1 = \rho_3$, $F = H$ et $G = I$ la matrice identité, deux possibilités peuvent se présenter:

a) $Ax^i \neq Ay^i \quad \forall\ i \geq 0$: en choisissant $\rho_1$ et $\rho_2$ suffisamment petit,

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{C}x^k, x^k - y^k) = 0$$

et, $\|x^{k+1} - y^{k+1}\|_F \leq \lambda \|x^k - y^k\|_F$, $k \geq 0$ où

$\lambda = \{1 - (1/\mu)(2\alpha\xi - \rho_1\rho_2\bar{\gamma}M)\rho_1\rho_2\}^{\frac{1}{2}}$ est une constante $\in (0,1)$.

b) $\exists i \geq 0$ telle que $Ax^i = Ay^i$: notre approche est celle de Bertsekas et Gafni (1980).

Preuve

1er cas: $Ax^i \neq Ay^i \quad \forall\ i \geq 0$.

En posant $C = \bar{C}$ dans la relation (5.9)', on obtient:

$$\|x^{k+1} - y^{k+1}\|_F^2 \leq \|x^k - y^k\|_F^2 + \rho_1^2\rho_2^2 (x^k - y^k)^t J_{\bar{C}}(x^k) F^{-1} J_{\bar{C}}(x^k)^t (x^k - y^k) - 2\rho_1\rho_2 (x^k - y^k)^t J_{\bar{C}}(x^k)^t (x^k - y^k) \tag{7.7}$$

Or,

$$(x^k - y^k)^t J_{\bar{C}}(x^k) F^{-1} J_{\bar{C}}(x^k)^t (x^k - y^k) = (Ax^k - Ay^k)^t J_C(Ax^k) AF^{-1} A^t J_C^t(Ax^k)(Ax^k - Ay^k)$$

$$\leq \bar{\gamma}(Ax^k - Ay^k, Ax^k - Ay^k) \quad \text{d'après (7.6)}$$

$$\leq \bar{\gamma} M (x^k - y^k, x^k - y^k) \text{ où } M = \|A\|$$

(voir Luenberger, 1969)*

De plus,

$$(x^k-y^k)^t \, \underline{J}_{\bar{C}}^t(x^k)(x^k-y^k) = (Ax^k-Ay^k)^t \, J_C^t(Ax^k)(Ax^k-Ay^k)$$

$$\geq \alpha \, (Ax^k-Ay^k, Ax^k-Ay^k) \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ est le paramètre de forte monotonie}$$

$$\geq \alpha\xi(x^k-y^k, x^k-y^k) \quad \text{où } \xi \text{ est la plus petite valeur propre non-nulle de la matrice symétrique semi-définie positive } A^tA.$$

Par conséquent, la relation (7.7) peut s'écrire:

$$\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F^2 \leq \|x^k-y^k\|_F^2 + (\rho_1^2\rho_2^2\bar{\gamma}M - 2\rho_1\rho_2\alpha\xi)(x^k-y^k, x^k-y^k).$$

Nous choisissons $\rho_1$ et $\rho_2$ telles que $\rho_1\rho_2 < 2\alpha\xi/\bar{\gamma}M$. Nous obtenons enfin

$$\|x^{k+1}-y^{k+1}\|_F^2 \leq \{1-(1/u)\rho_1\rho_2(2\alpha\xi-\rho_1\rho_2\bar{\gamma}M)\} \, \|x^k-y^k\|_F^2. \tag{7.8}$$

La relation (7.8) indique la présence d'une contraction relativement à la norme $\|x\|_F$.

D'où $$\lim_{k\to\infty} (C(Ax^k), Ax^k-Ay^k) = 0. \tag{7.9}$$

Enfin, en posant $\lambda = \{1-(1/u)\rho_1\rho_2(2\alpha\xi-\rho_1\rho_2\bar{\gamma}M)\}^{\frac{1}{2}}$, la relation suivante est obtenue:

$$\|x^k-y^k\|_F \leq \lambda^k \, \|x^0-y^0\|_F \, . \tag{7.10}$$

<u>2e cas</u>: $Ax^k = Ay^k$

A partir des relations (7.4) et (7.5), on obtient:

$$(x^{k+1}-x^k + \rho_1 F^{-1}\bar{C}x^k, x-x^{k+1}) \geq 0 \qquad \forall\ x \in \Omega$$

$$(y^{k+1}-y^k + \rho_1 F^{-1}\bar{C}x^k, y-y^{k+1}) \geq 0 \qquad \forall\ y \in \Omega$$

ce qui donne

$$[(x^{k+1}-y^{k+1}) - (x^k-y^k),\ y^{k+1}-x^{k+1}] \geq 0$$

c'est-à-dire

$$[Ax^{k+1}-Ay^{k+1},\ Ay^{k+1}-Ax^{k+1}] \geq 0$$

et enfin,

$$Ax^{k+} = Ay^{k+1} .$$

Donc, $Ax^{k+m} = Ay^{k+m} \quad \forall\ m \geq 0;\ \lim_{k\to\infty} (C(Ax^k), Ax^k - Ay^k) = 0.$

Ainsi, selon le résultat de Bertsekas et Gafni (1980), en prenant $\rho_1 > 0$ suffisamment petit, la suite $\{x^k\}$ converge vers un point $x^* \in \Omega^*$, la suite $\{y^k\}$ converge vers un point $y^* \in \Omega^*$ . (Voir la section 3 pour plus de détails.)

□

Nous allons maintenant démontrer que l'algorithme précédent génère un point fixe.

Proposition 7.3

Supposons que $Ax^k \neq Ay^k$ $\forall\ k \geq 0$, que les conditions de la proposition 7.2 sont satisfaites et que la continuité du Jacobien de la fonction de coût est assumée, alors l'algorithme précédent génère un point fixe à la condition que $\rho_1$ et $\rho_2$ sont choisis suffisamment petits.

**Preuve:**

Soient $\{(x^k,y^k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{(\bar{x}^k,\bar{y}^k)\}_{k=0}^{\infty}$ deux suites possiblement générées par cet algorithme. Soit $\gamma$ le maximum sur $\Omega$ de la valeur propre maximale de la matrice symétrique définie positive $[J_C(Ax)]^t\, AF^{-1}A^t\, [J_C(Ax)]$. (7.10)'

A partir de la relation (5.14), on peut écrire:

$$\|x^{k+1}-\bar{x}^{k+1}\|_F^2 \le \|x^k-\bar{x}^k\|_F^2 + \rho_1^2(\overline{C}x^k-\overline{C}\bar{x}^k)^t F^{-1}(\overline{C}x^k-\overline{C}\bar{x}^k) - 2\rho_1(\overline{C}x^k-\overline{C}\bar{x}^k, x^k-\bar{x}^k) \quad (7.11)$$

$$+\rho_1^2\rho_2^2\|F^{-1}(J_{\overline{C}}(x^k)^t(x^k-y^k) - J_{\overline{C}}(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F^2$$

$$+2\rho_1\rho_2\|F^{-1}(J_{\overline{C}}(x^k)^t(x^k-y^k) - J_{\overline{C}}(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F\cdot\|x^k-\bar{x}^k\|_F$$

$$+2\rho_1^2\rho_2\|F^{-1}(J_{\overline{C}}(x^k)^t(x^k-y^k) - J_{\overline{C}}(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F\cdot\|F^{-1}(\overline{C}x^k-\overline{C}\bar{x}^k)\|_F.$$

Calculons maintenant une borne supérieure à la quantité $\|F^{-1}(J_{\overline{C}}(x^k)^t(x^k-y^k) - J_{\overline{C}}(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F$. Nous obtenons

$$\|F^{-1}(J_{\overline{C}}(x^k)^t(x^k-y^k) - J_{\overline{C}}(\bar{x}^k)^t(\bar{x}^k-\bar{y}^k))\|_F$$

$$= \|F^{-1}A^t(J_C(Ax^k)^t(Ax^k-Ay^k) - J_C(A\bar{x}^k)^t(A\bar{x}^k-A\bar{y}^k))\|_F$$

$$\le \|F^{-1}A^t\|_F\cdot\|J_C(Ax^k)^t(Ax^k-Ay^k) - J_C(A\bar{x}^k)^t(A\bar{x}^k-A\bar{y}^k)\|_F \quad (7.12)$$

$$\le \bar{a}\,\lambda^k \quad \text{où } \lambda \text{ est défini à la proposition 7.2,}$$

$$\text{et } \bar{a} = \tilde{\gamma}\{\|Ax^0-Ay^0\|_F + \|A\bar{x}^0-A\bar{y}^0\|_F\}\cdot\|F^{-1}A^t\|_F, \quad \tilde{\gamma} \text{ étant définie à la proposition 5.3.}$$

Cette quantité décroît strictement vers 0 lorsque k croît.

De plus,

$$\|F^{-1}(\overline{Cx}^k - \overline{C\bar{x}}^k)\|_F^2$$

$$= (C(Ax^k) - C(A\bar{x}^k))^t A F^{-1} A^t (C(Ax^k) - C(A\bar{x}^k))$$

$$\leq (Ax^k - A\bar{x}^k)^t \left[\frac{\partial c(Ax)}{\partial Ax}\right]^t A F^{-1} A^t \left[\frac{\partial c(ax)}{\partial Ax}\right] (Ax^k - A\bar{x}^k) \quad \text{d'après l'appendice 2 de Dafermos (1980).}$$

$$\leq \gamma(Ax^k - A\bar{x}^k, Ax^k - A\bar{x}^k) \quad \text{d'après (7.10)'}$$

$$\leq \gamma M (x^k - \bar{x}^k, x^k - \bar{x}^k) \quad (M = \|A\|, \text{ voir Luenberger 1969})^*$$

$$\leq \frac{\gamma M}{\bar{u}} \|x^k - \bar{x}^k\|_F^2 \quad \text{où } \bar{u} \text{ est la valeur propre minimale de F.} \qquad (7.13)$$

A partir de (7.12), (7.13) et du fait que la fonction de coût sur les arcs est fortement monotone de rayon $\alpha > 0$, l'inégalité (7.11) est simplifiée comme suit:

$$\|x^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\|_F^2 \leq \{1 - (\tfrac{1}{u})\rho_1\rho_2(2\alpha\xi - \gamma\rho_1\rho_2 M)\} \cdot \|x^k - \bar{x}^k\|_F^2$$

$$+ \bar{a}\lambda^k \{\rho_1^2\rho_2^2\bar{a}\lambda^k + 2\rho_1\rho_2\|x^k - \bar{x}^k\|_F + 2\rho_1^2\rho_2(\tfrac{\gamma M}{\bar{u}})^{\frac{1}{2}}\|x^k - \bar{x}^k\|_F\} \qquad (7.14)$$

En posant $\bar{\lambda} = \{1 - (\frac{1}{u})\rho_1\rho_2(2\alpha\xi - \gamma\rho_1\rho_2 M)\}$ ,

$$b = \sup_k \{\rho_1^2\rho_2^2\bar{a}\lambda^k + 2\rho_1\rho_2\|x^k - \bar{x}^k\|_F + 2\rho_1^2\rho_2(\tfrac{\gamma M}{\bar{u}})^{\frac{1}{2}}\|x^k - \bar{x}^k\|_F\}$$

et en procédant par induction dans (7.14), un choix suffisamment petit de $\rho_1$ et $\rho_2$ implique que

$$\|x^k - \bar{x}^k\|_F \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Ainsi, le résultat de la proposition (7.3) s'ensuit. □

---

* $\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}}$ où $\lambda_{max}$ est la plus grande valeur propre de la matrice symétrique et semi-définie positive $A^tA$.

On obtient des estimés du taux de convergence très similaires à ceux obtenus à la proposition 5.4.

Terminons cette section en affirmant que l'hypothèse $G_k = G \quad \forall\, k \geq 0$ pourrait sûrement être omise. Les résultats de Bertsekas et Gafni (1980) à ce sujet seraient à considérer.

## CONCLUSION

Dans ce document, nous avons considéré les méthodes dites de projection pour calculer un point d'équilibre. Nous nous sommes basés sur les trois formulations du problème d'équilibre énoncées à la section 2.

Cela contient un survol des principaux algorithmes de projection qui peuvent être appliqués au problème d'équilibre, des commentaires sur leur convergence et leur implantation possible et certaines généralisations d'algorithmes connus.

A partir de quelques essais, il semblerait que l'approche primale (Dafermos, 1980; Bertsekas et Gafni,1980; Sibony, 1970, etc.) donne de meilleurs résultats.

Une étude approfondie sur des réseaux de tailles plus réalistes sera effectuée ultérieurement.

## RÉFÉRENCES

AUSLENDER, A. (1976) Optimisation. Méthode numérique. Masson. Paris.

AUSLENDER, A. (19 ) "Recherche des points de selle d'une fonction", Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand, France.

BAKUSHINSKII, A.B. et B.T. POLYAK (1974) "On the Solution of Variational Inequalities", DAN, 219, 5, 1038-1041; Soviet Math. Doklady 15, 1705-1710.

BECKMANN, M.J.,C.B. McGUIRE et C.B. WINSTEN (1956) Studies in the Economics of Transportation , Yale University Press, New Haven, Conn. U.S.A.

BERTSEKAS, D.P. (1974) "On the Goldstein-Levitin-Polyak Gradient Projection Method", IEEE Transactions on Automatic Control Vol. AC-21, No 2.

BERTSEKAS, D.P. et E.M. GAFNI (1980) "Projection Methods for Variational Inequalities with Application to the Traffic Assignment Problem". Laboratory for Information and Decision Systems, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass. U.S.A.

DAFERMOS, S.C. (1972) An Extended Traffic Assignment Model with Applications to Two-Way Traffic. Transportation Science 6, 73-87.

DAFERMOS, S. (1980) Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. Transportation Science 14, No 1.

DEM'JANOV, V.F. et A.B.PEVNYI (1972) Numerical Methods for Finding Saddle Points, Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz 12, 1099-1127 = U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. 12, No 5, 11-52.

DUNN, J.C. (1981) Global and Asymptotic Convergence Rate Estimates for a Class of Projected Gradient Processes", SIAM J. Control and Optimization , Vol. 19, No 3, p. 368-400.

EAVES, B.C. et R. SAIGAL (1972) Homotopies for Computation of Fixed Points on Unbounded Regions. Math. Prog. 3, 225-237.

FISK, C.S. et D.E. Boyce (1981) A Perspective on the Problem of Combining Network Equilibrium with Spatial Interaction and Activity Models". Publication #1, Transportation Planning Group, Department of Civil Engineering, University of Illinois.

GLOWINSKI, G., J.L. LIONS et R. TREMOLIERES (1976) Analyse numérique des inéquations variationnelles. Méthodes mathématiques de l'informatique. Bordas, Paris, p. 13-14.

HEARN, D.W.* et S. NGUYEN** (19 ) Dual and Saddle Functions Related to the Gap Function". *Dept. of Industrial and Systems Engineering, University of Florida, Gainesville, **Université de Montréal, Canada.

KARMANOV, V. (1977) Programmation mathématique. Editions MIR, Moscou.

KELLEY, J.H. (1960) The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs". J. Soc. Ind. Appl. Math. 8, 4, 703-712.

KINDERLEHRER, D. et G. STAMPACCHIA (1980) An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. Academic Press Inc.

LE BLANC, L.J., E.K. MORLOK et W.P. PIERSKALLA (1975) An Efficient Approach to Solving the Road Network Equilibrium Traffic Assignment Problem. Transportation Research 9, 309-318.

LUENBERGER, D.G. (1969) Optimization by Vector Space Methods. John Wiley & Sons, Inc.

MAJSTROVSKY, G.D. (1976) On Gradient Method for Saddle Points Searching. EMM 12, 5, 917-929 (en russe).

McCORMICK,G.P. et R.A. TAPIA (1970). The Gradient Projection Method and Curry's Theorem. MRC Technical Summary Report #1074, University of Wisconsin.

McCORMICK, G.P. et R.A. Tapia (1972) The Gradient Projection Method under Mild Differentiability Conditions. SIAM J. Control 10, 1.

MERRILL, O.H. (1971) Applications and Extensions of an Algorithm that Computes Fixed Points of Certain Non-Empty Convex Upper Semi-Continuous Point to Set Mappings. Department of Industrial Engineering, University of Michigan, Ann Arbor, Technical Report #71-7.

NGUYEN, S. (1974) An Algorithm for the Traffic Assignment Problem. Transportation Science 8, 203-216.

NGUYEN, S. (1976) A Unified Approach to Equilibrium Methods of Traffic Assignment. In Traffic Equilibrium Methods (M.Florian, ed.) Vol. 118, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, Berlin.

NGUYEN, S. et C. DUPUIS (1982) An Efficient Method for Computing Traffic Equilibria in Network with Asymmetric Transportation Costs. Publication #205-A, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal. (A paraître dans Transportation Science.)

POLYAK, B.T. (1967) A General Method for Solving Extremal Problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR 174, 1, 33-36.

POLYAK, B.T. (1969) Minimization of Unsmooth Functionals. Zh. vȳchisl Mat. mat. Fiz. 9, 3, 509-521.

POLYAK, B.T. (1971) Convergence of Methods of Feasible Directions in Extremal Problems. Zh. vȳchisl. Mat. mat. Fiz. 11, 4, 855-869.

POLYAK, B.T. (19 ) Subgradient Methods: A Survey of Soviet Research.

SHEPILOV, M.A. (1976) The Generalized Gradient Method for Extremal Problems. Zh. vȳchisl. Mat. mat. Fiz. 16, 1, 242-247.

SHOR, N.Z. (1968) The Rate of Convergence of the Generalized Gradient Descent Method. Kibern 4, 3, 98-99; Cybernetics 4, 3, 79-80.

SHU-CHERNG FANG (19 ) Traffic Equilibria on Multiclass-User Transportation Networks Analysed via Variational Inequalities. Department of Mathematics, University of Maryland, Baltimore County, Maryland 21228.

SIBONY, M. (1970) Méthodes itératives pour les équations et inéquations aux dérivées partielles nonlinéaires de type monotone. Calcolo 7, 65-183.

SMITH, M.J. (1979) Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria. Transportation Research B 13B, 295-304.

SZYMANOWSKI, J. et RUSZCZYNSKI, A. (19 ) An Accuracy Selection Algorithm for the Modified Gradient Projection Method in Minimax Problems. Institute of Automatic Control, Technical University of Warsaw 00-665, Warszawa, Poland.

TODD, M.J. (1976) The Computation of Fixed Points and Applications. Lecture Notes in Econ. and Math. Systems #124, Springer-Verlag, New York.

WARDROP, J.G. (1952) Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. Proc. Inst. Civil Engineers, Part II, 325-378.